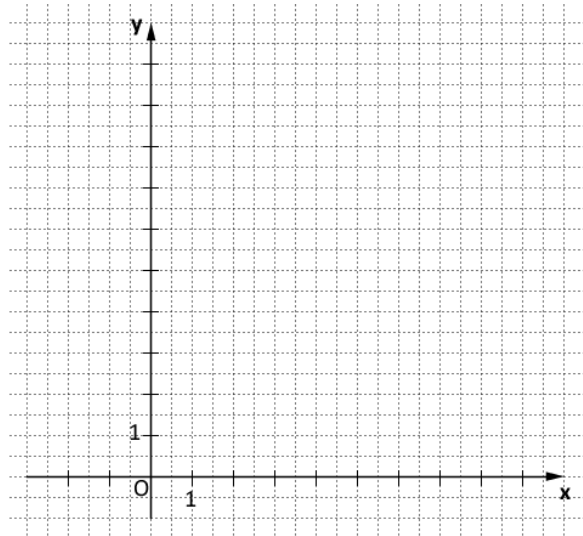


## Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A2

### Aufgabe A2.

Die Pfeile  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  mit  $O(0|0)$  spannen für  $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$  Parallelogramme  $OP_nQ_nR$  auf.



### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten des Pfeils  $\overrightarrow{OP_1}$  für  $\varphi = 30^\circ$  und des Pfeils  $\overrightarrow{OP_2}$  für  $\varphi = 90^\circ$ .

Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme  $OP_1Q_1R$  und  $OP_2Q_2R$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

### Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Der Pfeil  $\overrightarrow{OP_3}$  hat die  $x$ -Koordinate 5.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte  $Q_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .  
[Ergebnis:  $Q_n(3 + 4 \cdot \sin \varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi)$ ]

### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel  $p$  mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 + 12$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) der Trägergraph der Punkte  $Q_n$  ist.

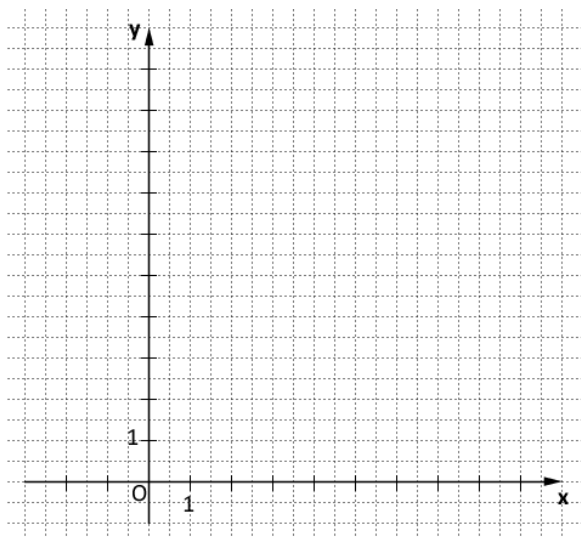
### Aufgabe A2.5 (1 Punkt)

Begründen Sie, dass der Trägergraph der Punkte  $P_n$  ebenfalls eine Parabel ist.

## Lösung

## Aufgabe A2.

Die Pfeile  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  mit  $O(0|0)$  spannen für  $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$  Parallelogramme  $OP_nQ_nR$  auf.



## Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten des Pfeils  $\overrightarrow{OP_1}$  für  $\varphi = 30^\circ$  und des Pfeils  $\overrightarrow{OP_2}$  für  $\varphi = 90^\circ$ .

Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme  $OP_1Q_1R$  und  $OP_2Q_2R$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

## Koordinaten von Vektoren bestimmen

Gegeben:  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Winkel  $\varphi_1 = 30^\circ$  und  $\varphi_2 = 90^\circ$  werden in  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$  eingesetzt.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin 30^\circ \\ 8 \cdot \cos^2 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

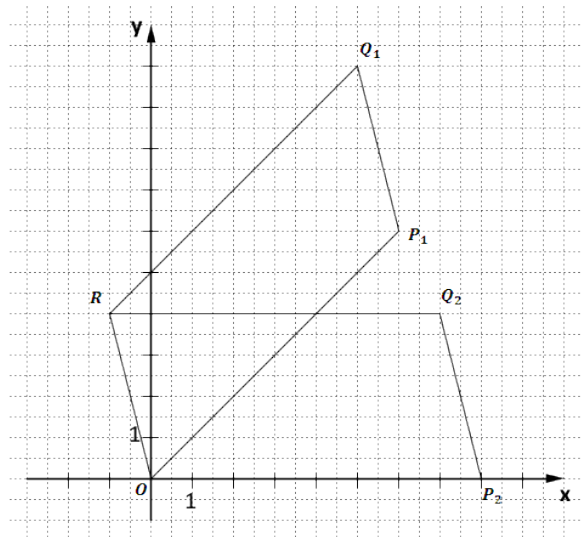
$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin 90^\circ \\ 8 \cdot \cos^2 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Skizze

Parallelogramme  $OP_1Q_1R$  und  $OP_2Q_2R$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1)  $\overrightarrow{OP_1}$  einzeichnen
- 2)  $\overrightarrow{OR}$  einzeichnen
- 3) Durch parallele Vektoren zum Parallelogramm ergänzen

**Aufgabe A2.2** (2 Punkte)

Der Pfeil  $\overrightarrow{OP_3}$  hat die  $x$ -Koordinate 5.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

**Lösung zu Aufgabe A2.2****Winkel bestimmen**

Gegeben:  $\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ ? \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$

Gesucht:  $\varphi$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die  $x$ -Koordinate von  $\overrightarrow{OP_3}$  wird mit der  $x$ -Koordinate von  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi)$  gleichgesetzt.

Anschließend wird nach  $\varphi$  aufgelöst.

$$5 = 4 + 4 \cdot \sin \varphi \quad | \quad -4$$

$$1 = 4 \cdot \sin \varphi \quad | \quad :4$$

$$0,25 = \sin \varphi$$

$$\varphi = \sin^{-1} 0,25 \approx 14,48^\circ$$

**Aufgabe A2.3** (1 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte  $Q_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .  
[Ergebnis:  $Q_n(3 + 4 \cdot \sin \varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi)$ ]

**Lösung zu Aufgabe A2.3****Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben:  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vorüberlegung:

Mit Hilfe welcher Vektoren lassen sich die Vektoren  $\overrightarrow{OQ_n}$  ( $= \overrightarrow{Q_n}$ ) darstellen?

Erläuterung: *Vektoraddition*

Bei der Vektoraddition wird der Fuß des zweiten Vektors mittels Parallelverschiebung auf die Spitze des ersten Vektors verschoben. Der Vektor vom Fuß des ersten Vektors bis zur Spitze des zweiten Vektors repräsentiert den Ergebnisvektor.

$$\overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} \oplus \overrightarrow{P_nQ_n}$$

$$\overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} \oplus \overrightarrow{OR}$$

$$\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_n(3 + 4 \cdot \sin \varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi)$$

**Aufgabe A2.4** (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel  $p$  mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 + 12$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) der Trägergraph der Punkte  $Q_n$  ist.

Lösung zu Aufgabe A2.4**Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Gegeben:  $Q_n(3 + 4 \cdot \sin \varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi)$

Gesucht: Trägergraph  $p : y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die  $x$ -Koordinate  $3 + 4 \cdot \sin \varphi$  von  $Q_n$  wird nach  $\sin \varphi$  aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die  $y$ -Koordinate von  $Q_n$  eingesetzt.

$$x' = 3 + 4 \cdot \sin \varphi \quad | \quad -3$$

$$x' - 3 = 4 \cdot \sin \varphi \quad | \quad : 4$$

$$\frac{x' - 3}{4} = \sin \varphi$$

$y$ -Koordinate von  $Q_n$ :

$$y' = 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$y' = 4 + 8 \cdot (1 - \sin^2 \varphi)$$

$$y' = 4 + 8 \cdot \left(1 - \left(\frac{x' - 3}{4}\right)^2\right)$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$\left(\frac{a}{b}\right)^2$  kann mit Hilfe der Potenzregel  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$  umgewandelt werden.

$$y' = 4 + 8 \cdot \left(1 - \frac{(x' - 3)^2}{16}\right)$$

$$y' = 4 + 8 - 8 \cdot \frac{(x' - 3)^2}{16}$$

$$y' = 12 - \frac{1}{2} \cdot (x' - 3)^2$$

$$\Rightarrow p : y = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 + 12$$

**Aufgabe A2.5** (1 Punkte)

Begründen Sie, dass der Trägergraph der Punkte  $P_n$  ebenfalls eine Parabel ist.

Lösung zu Aufgabe A2.5**Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Die Punkte  $\vec{Q}_n$  gehen durch Parallelverschiebung der Punkte  $\vec{P}_n$  hervor.

Verschiebt man eine Parabel parallel, so entsteht wiederum eine Parabel.