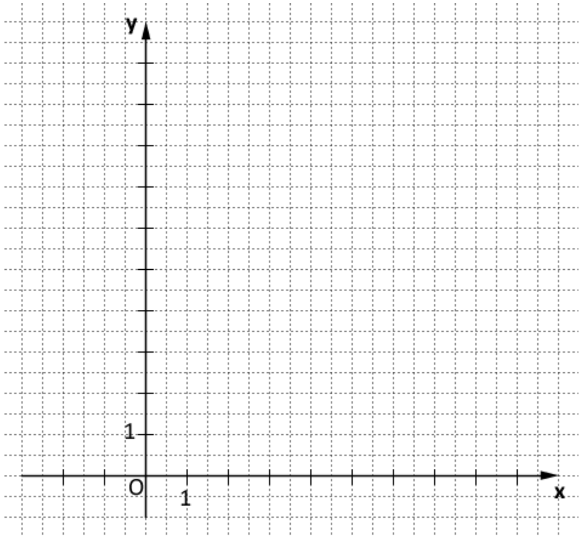
Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die Pfeile $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin\varphi \\ 8 \cdot \cos^2\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ spannen für $\varphi \in [0°; 90°]$ Parallelogramme OP_nQ_nR auf.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{OP_1}$ für $\varphi = 30°$ und des Pfeils $\overrightarrow{OP_2}$ für $\varphi = 90°$.
Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme OP_1Q_1R und OP_2Q_2R in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Der Pfeil $\overrightarrow{OP_3}$ hat die x-Koordinate 5.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte Q_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $Q_n(3 + 4 \cdot \sin\varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2\varphi)$]

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel p mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 12$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ der Trägergraph der Punkte Q_n ist.

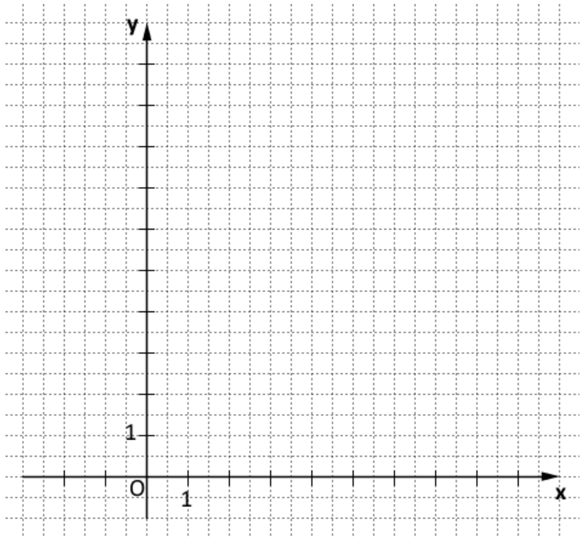
Aufgabe A2.5 (1 Punkt)

Begründen Sie, dass der Trägergraph der Punkte P_n ebenfalls eine Parabel ist.

Lösung

Aufgabe A2.

Die Pfeile $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\sin\varphi \\ 8\cdot\cos^2\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ spannen für $\varphi \in [0°; 90°]$ Parallelogramme $O\,P_n\,Q_n\,R$ auf.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{OP_1}$ für $\varphi = 30°$ und des Pfeils $\overrightarrow{OP_2}$ für $\varphi = 90°$.
Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme $O\,P_1\,Q_1\,R$ und $O\,P_2\,Q_2\,R$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Koordinaten von Vektoren bestimmen

Gegeben: $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\sin\varphi \\ 8\cdot\cos^2\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi_1 = 30°$, $\varphi_2 = 90°$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Winkel $\varphi_1 = 30°$ und $\varphi_2 = 90°$ werden in $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\sin\varphi \\ 8\cdot\cos^2\varphi \end{pmatrix}$ eingesetzt.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\sin 30° \\ 8\cdot\cos^2 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\sin 90° \\ 8\cdot\cos^2 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skizze

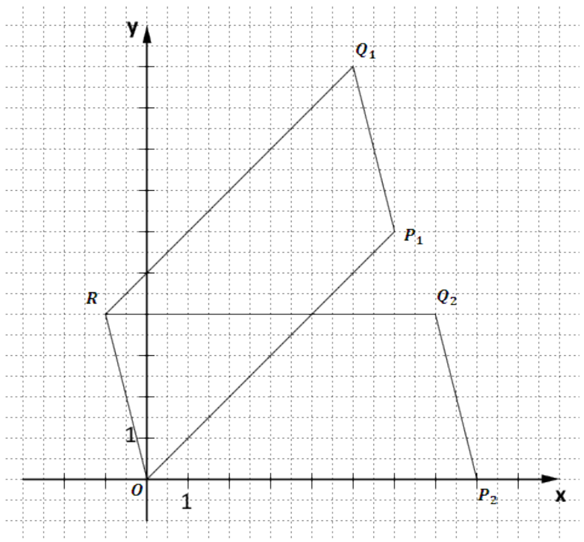
Parallelogramme $O\,P_1\,Q_1\,R$ und $O\,P_2\,Q_2\,R$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) $\overrightarrow{OP_1}$ einzeichnen

2) $\overrightarrow{OR}$ einzeichnen

3) Durch parallele Vektoren zum Parallelogramm ergänzen



Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Der Pfeil $\overrightarrow{OP_3}$ hat die x-Koordinate 5.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Winkel bestimmen

Gegeben: $\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ ? \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin\varphi \\ 8 \cdot \cos^2\varphi \end{pmatrix}$

Gesucht: φ

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die x-Koordinate von $\overrightarrow{OP_3}$ wird mit der x-Koordinate von $\overrightarrow{OP_n}(\varphi)$ gleichgesetzt.

Anschließend wird nach φ aufgelöst.

$5 = 4 + 4 \cdot \sin\varphi \quad | \quad -4$

$1 = 4 \cdot \sin\varphi \quad | \quad :4$

$0,25 = \sin\varphi$

$\varphi = \sin^{-1} 0,25 \approx 14,48°$

Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte Q_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $Q_n(3 + 4 \cdot \sin\varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2\varphi)$]

Lösung zu Aufgabe A2.3

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin\varphi \\ 8 \cdot \cos^2\varphi \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vorüberlegung:
Mit Hilfe welcher Vektoren lassen sich die Vektoren $\overrightarrow{OQ_n}$ $\left(= \overrightarrow{Q_n}\right)$ darstellen?

Erläuterung: *Vektoraddition*

Bei der Vektoraddition wird der Fuß des zweiten Vektors mittels Parallelverschiebung auf die Spitze des ersten Vektors verschoben. Der Vektor vom Fuß des ersten Vektors bis zur Spitze des zweiten Vektors repräsentiert den Ergebnisvektor.

$\overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} \oplus \overrightarrow{P_nQ_n}$

$\overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} \oplus \overrightarrow{OR}$

$\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin\varphi \\ 8 \cdot \cos^2\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4 \cdot \sin\varphi \\ 4 + 8 \cdot \cos^2\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad Q_n(3+4\cdot\sin\varphi|4+8\cdot\cos^2\varphi)$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel p mit der Gleichung $y=-\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2+12$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ der Trägergraph der Punkte Q_n ist.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $Q_n(3+4\cdot\sin\varphi|4+8\cdot\cos^2\varphi)$

Gesucht: Trägergraph $p: y=?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x-Koordinate $3+4\cdot\sin\varphi$ von Q_n wird nach $\sin\varphi$ aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von Q_n eingesetzt.

$x' = 3+4\cdot\sin\varphi \quad | \quad -3$

$x'-3 = 4\cdot\sin\varphi \quad | \quad :4$

$\frac{x'-3}{4} = \sin\varphi$

y-Koordinate von Q_n:

$y' = 4+8\cdot\cos^2\varphi$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x = 1-\sin^2 x$

$y' = 4+8\cdot\left(1-\sin^2\varphi\right)$

$y' = 4+8\cdot\left(1-\left(\frac{x'-3}{4}\right)^2\right)$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$\left(\frac{x'-3}{4}\right)^2$ kann mit Hilfe der Potenzregel $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$ umgewandelt werden.

$y' = 4+8\cdot\left(1-\frac{(x'-3)^2}{4^2}\right)$

$y' = 4+8-8\cdot\frac{(x'-3)^2}{16}$

$y' = 12-\frac{1}{2}\cdot(x'-3)^2$

$\Rightarrow \quad p: y=-\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2+12$

Aufgabe A2.5 (1 Punkte)

Begründen Sie, dass der Trägergraph der Punkte P_n ebenfalls eine Parabel ist.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Die Punkte $\overrightarrow{Q_n}$ gehen durch Parallelverschiebung der Punkte $\overrightarrow{P_n}$ hervor.

Verschiebt man eine Parabel parallel, so entsteht wiederum eine Parabel.