

## Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A3

### Aufgabe A3.

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke  $AB_nC_nD_nE$ . Die Eckpunkte  $C_n$  und der Mittelpunkt  $F$  der Seite  $[AE]$  liegen auf der Symmetrieachse.

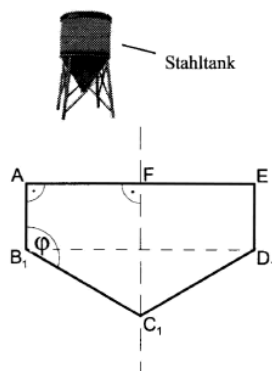
Es gilt:

$$\overline{AE} = 2,00 \text{ m}; \quad \overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n};$$

$$\angle B_n A E = 90^\circ; \quad \angle A F C_n = 90^\circ.$$

Die Winkel  $C_n B_n A$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in [104,04^\circ; 160,02^\circ]$ .

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck  $AB_1C_1D_1E$  für  $\varphi = 120^\circ$ .



#### Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen  $V$  der Stahltanks in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90^\circ) \text{m}^3]$$

#### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.

Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Lösung

### Aufgabe A3.

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke  $AB_nC_nD_nE$ . Die Eckpunkte  $C_n$  und der Mittelpunkt  $F$  der Seite  $[AE]$  liegen auf der Symmetrieachse.

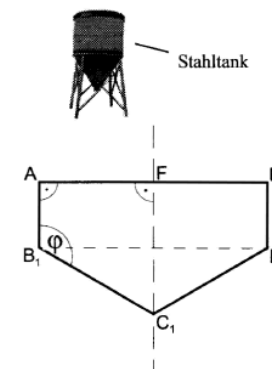
Es gilt:

$$\overline{AE} = 2,00 \text{ m}; \quad \overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n};$$

$$\angle B_n A E = 90^\circ; \quad \angle A F C_n = 90^\circ.$$

Die Winkel  $C_n B_n A$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in [104,04^\circ; 160,02^\circ]$ .

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck  $AB_1C_1D_1E$  für  $\varphi = 120^\circ$ .



#### Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen  $V$  der Stahltanks in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90^\circ) \text{m}^3]$$

#### Lösung zu Aufgabe A3.1

##### Volumen eines Rotationskörpers

Gegeben:

$$\overline{AE} = 2,00 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} = 1,00 \text{ m}$$

Seien  $G_n$  die Schnittpunkte von  $[B_n D_n]$  und  $[F C_n]$ .

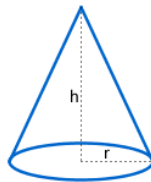
$$\overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n} \quad \Rightarrow \quad \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$$

Der Stahltank ist ein zusammengesetzter Körper aus Zylinder und Kegel.

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders, Volumen eines Kegels*

Ein Zylinder mit Radius  $r$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$



Ein Kegel mit Radius  $r$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Tank}} = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$$

$$V_{\text{Tank}} = r^2 \cdot \pi \cdot h_{\text{Zylinder}} + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{\text{Kegel}}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Im Stahltank ist der Radius des Zylinders zugleich der Radius des Kegels.

Nun wird  $r^2 \cdot \pi$  ausgeklammert.

$$V_{\text{Tank}} = r^2 \cdot \pi \cdot \left( h_{\text{Zylinder}} + \frac{1}{3} \cdot h_{\text{Kegel}} \right)$$

Erläuterung: *Einsetzen*

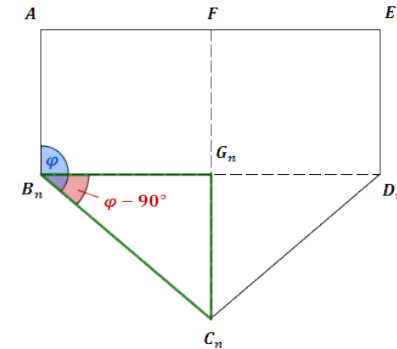
Der Radius  $r = \overline{AF} = 1,00 \text{ m}$ , die Höhe  $h_{\text{Zylinder}} = \overline{AB_n}$  und die Höhe  $h_{\text{Kegel}} = \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$  werden in die Formel für das Tankvolumen eingesetzt.

$$V_{\text{Tank}} = 1^2 \cdot \pi \cdot \left( \overline{AB_n} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AB_n} \right)$$

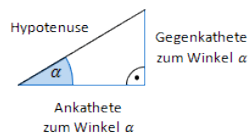
$$V_{\text{Tank}} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{AB_n}$$

Nun muss noch  $\overline{AB_n}$  berechnet werden.

Da  $\overline{AB_n} = \overline{G_n C_n}$  und das Tankvolumen in Abhängigkeit von  $\varphi$  berechnet werden soll, betrachtet man das Dreieck  $B_n C_n G_n$ .



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im Dreieck  $B_n C_n G_n$  gilt:

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{\overline{G_n C_n}}{\overline{B_n G_n}} = \frac{\overline{A B_n}}{1}$$

$$\Rightarrow \overline{A B_n} = \tan(\varphi - 90^\circ)$$

$$V_{T_{ank}} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{A B_n}^3$$

$$\Rightarrow V_{T_{ank}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan^3(\varphi - 90^\circ)$$

### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.

Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Lösung zu Aufgabe A3.2

#### Umrechnung von Einheiten

$$\text{Gegeben: } V = 5000l, V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan^3(\varphi - 90^\circ)m^3$$

Bevor  $V = 5000l$  eingesetzt werden kann, muss die Einheit Liter in Kubikmeter umgewandelt werden.

Es gilt:

$$1 dm^3 \hat{=} 1l \quad | \quad \cdot 1000$$

$$1 m^3 \hat{=} 1000l \quad | \quad \cdot 5$$

$$5 m^3 \hat{=} 5000l$$

$$\Rightarrow V = 5000l = 5 m^3$$

#### Winkel bestimmen

Winkel bestimmen:

$$5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90^\circ) \quad | \quad : \left( \frac{4}{3} \cdot \pi \right)$$

$$\frac{15}{4\pi} = \tan(\varphi - 90^\circ)$$

$$\varphi - 90^\circ = \tan^{-1} \left( \frac{15}{4\pi} \right) \approx 50,05^\circ \quad | \quad +90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 140,05^\circ$$