

## Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe B1

### Aufgabe B1.

Die Raute  $ABCD$  mit den Diagonalen  $[AC]$  und  $[BD]$  ist die Grundfläche eines geraden Prismas  $ABCDEF GH$ . Der Punkt  $E$  liegt senkrecht über dem Punkt  $A$ . Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Raute  $ABCD$  ist der Punkt  $T$ . Der Schnittpunkt der Diagonalen  $[EG]$  und  $[FH]$  der Raute  $EFGH$  ist der Punkt  $M$ .  
Es gilt:  $AC = 10$  cm;  $BD = 6$  cm;  $AE = 7$  cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas  $ABCDEF GH$ , wobei die Strecke  $[AC]$  auf der Schrägbildachse und der Punkt  $A$  links vom Punkt  $C$  liegen soll.

Für die Zeichnung gilt:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ .

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels  $CAM$ .

[Ergebnis:  $\angle CAM = 54,46^\circ$ ]

#### Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Punkte  $P_n$  liegen auf der Strecke  $[AM]$ . Die Winkel  $P_nCA$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]0^\circ; 54,46^\circ]$ . Die Punkte  $P_n$  sind zusammen mit den Punkten  $B$  und  $D$  die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken  $BDP_n$  mit der gemeinsamen Basis  $[BD]$ .

Die Winkel  $BP_nD$  haben das Maß  $\varepsilon$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $BDP_1$  für  $\varphi = 30^\circ$  in das Schrägbild zu 1.1 ein.

Für alle Dreiecke  $BDP_n$  gilt:  $\varepsilon \in [46,40^\circ; 72,79^\circ]$ .

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

#### Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Das Dreieck  $BDP_2$  ist gleichseitig.

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke  $[AP_2]$ .

[Teilergebnis:  $\overline{TP_2} = 5,20$  cm]

#### Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[CP_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$\overline{CP_n}(\varphi) = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

### Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Punkte  $P_n$  sind die Spitzen von Pyramiden  $ABCDP_n$  mit den Höhen  $[P_nK_n]$ , deren Fußpunkte  $K_n$  auf der Strecke  $[AT]$  liegen.

Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCDP_1$  und ihre Höhe  $[P_1K_1]$  in das Schrägbild zu 1.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCDP_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

### Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide  $ABCDP_3$  beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas  $ABCDEF GH$ .

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .



## Lösung

## Aufgabe B1.

Die Raute  $ABCD$  mit den Diagonalen  $[AC]$  und  $[BD]$  ist die Grundfläche eines geraden Prismas  $ABCDEFGH$ . Der Punkt  $E$  liegt senkrecht über dem Punkt  $A$ . Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Raute  $ABCD$  ist der Punkt  $T$ . Der Schnittpunkt der Diagonalen  $[EG]$  und  $[FH]$  der Raute  $EFGH$  ist der Punkt  $M$ . Es gilt:  $AC = 10$  cm;  $BD = 6$  cm;  $AE = 7$  cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas  $ABCDEFGH$ , wobei die Strecke  $[AC]$  auf der Schrägbildachse und der Punkt  $A$  links vom Punkt  $C$  liegen soll.

Für die Zeichnung gilt:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ .

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels  $CAM$ .

[Ergebnis:  $\angle CAM = 54,46^\circ$ ]

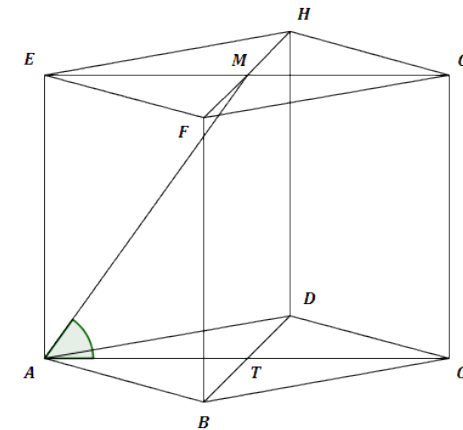
## Lösung zu Aufgabe B1.1

## Skizze

Prisma  $ABCDEFGH$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1)  $[AC]$  mit  $\overline{AC} = 10$  cm einzeichnen
- 2)  $[BD]$  durch Mittelpunkt von  $[AC]$  im Winkel von  $45^\circ$  einzeichnen  
Für die Zeichnung:  $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 6$  cm = 3 cm,  $\overline{BT} = \overline{TD} = 1,5$  cm
- 3) Raute  $ABCD$  verbinden
- 4)  $[AE]$  mit  $\overline{AE} = 7$  cm einzeichnen
- 5) Weitere Kanten  $[BF]$ ,  $[CG]$  und  $[DH]$  mit Höhe von 7 cm einzeichnen
- 6) Deckfläche und Prisma verbinden



## Winkel bestimmen

Gegeben:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AT} = 5 \text{ cm}$$

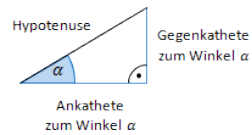


$$\overline{AE} = 7 \text{ cm} \Rightarrow \overline{MT} = 7 \text{ cm}$$

Gesucht:  $\angle CAM$

Man betrachtet das Dreieck  $ATM$ .

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan(\angle CAM) = \frac{\overline{MT}}{\overline{AT}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \angle CAM = \tan^{-1} \frac{7}{5} = 54,46^\circ$$

### Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Punkte  $P_n$  liegen auf der Strecke  $[AM]$ . Die Winkel  $P_nCA$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]0^\circ; 54,46^\circ]$ . Die Punkte  $P_n$  sind zusammen mit den Punkten  $B$  und  $D$  die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken  $BDP_n$  mit der gemeinsamen Basis  $[BD]$ .

Die Winkel  $BP_nD$  haben das Maß  $\varepsilon$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $BDP_1$  für  $\varphi = 30^\circ$  in das Schrägbild zu 1.1 ein.

Für alle Dreiecke  $BDP_n$  gilt:  $\varepsilon \in [46,40^\circ; 72,79^\circ]$ .

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

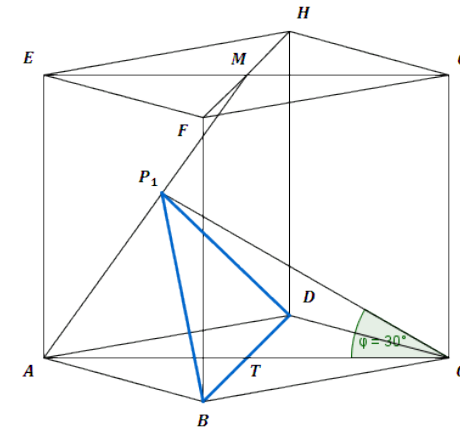
### Lösung zu Aufgabe B1.2

#### Skizze

Dreieck  $BDP_1$  für  $\varphi = 30^\circ$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Winkel  $\varphi = 30^\circ$  eingezeichnet. Der Schenkel dieses Winkels schneidet die Strecke  $[AM]$  im Punkt  $P_1$ .



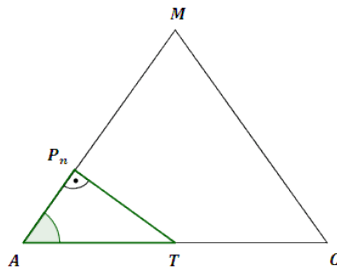
#### Winkel bestimmen

Gesucht ist der größte Wert, den  $\varepsilon$  annehmen kann.

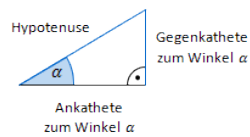
$\overline{TP_n}$  ist die Höhe der gleichschenkligen Dreiecke  $BDP_n$ .

$\varepsilon$  ist genau dann am größten, wenn die Höhe  $\overline{TP_n}$  minimal ist.

$\overline{TP_n}$  ist genau dann minimal, wenn  $[TP_n]$  senkrecht auf  $[AM]$  steht. Für diesen Fall betrachtet man das rechtwinklige Dreieck  $ATP_n$ .



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck  $ATP_n$  gilt:

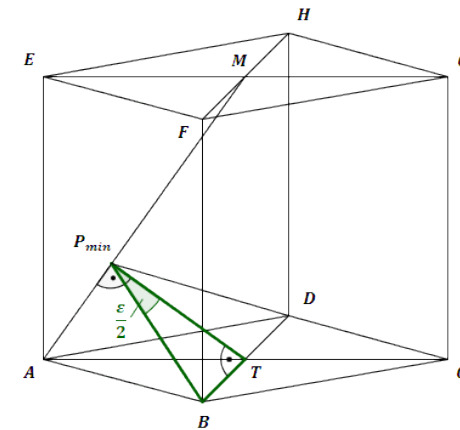
$$\sin \angle CAM = \frac{\overline{TP_n}}{\overline{AT}}$$

$$\sin 54,46^\circ = \frac{\overline{TP_{min}}}{5} \quad | \cdot 5$$

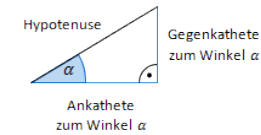
$$\overline{TP_{min}} = 5 \cdot \sin 54,46^\circ$$

Für diesen kleinsten Wert  $\overline{TP_{min}}$  muss jetzt noch  $\varepsilon$  berechnet werden.

Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck  $BT P_{min}$ .



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck  $BT P_{min}$  gilt:

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{BT}}{\overline{TP_{min}}} = \frac{3}{5 \cdot \sin 54,46^\circ}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = \tan^{-1} \left( \frac{3}{5 \cdot \sin 54,46^\circ} \right) \quad | \cdot 2$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{3}{5 \cdot \sin 54,46^\circ} \right)$$

$$\varepsilon \approx 72,79^\circ$$

**Aufgabe B1.3** (3 Punkte)

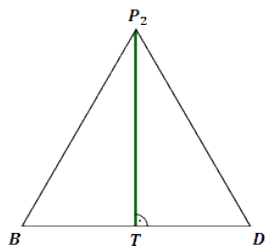
Das Dreieck  $BDP_2$  ist gleichseitig.

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke  $[AP_2]$ .

[Teilergebnis:  $\overline{TP_2} = 5,20$  cm]

**Lösung zu Aufgabe B1.3****Länge einer Strecke**

Zuerst berechnet man die Höhe  $TP_2$  des gleichseitigen Dreiecks  $BDP_2$ .



Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

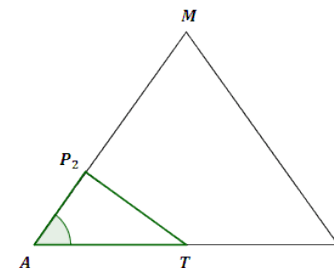
Die Höhe  $h$  eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  berechnet man mit folgender Formel:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

$$\overline{TP_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \overline{BD}$$

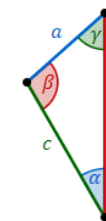
$$\overline{TP_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \approx 5,20 \text{ cm}$$

Zur Berechnung von  $\overline{AP_2}$  betrachtet man das Dreieck  $ATP_2$ .



In diesem Dreieck sind  $\overline{AT} = 5$  cm,  $\overline{TP_2} = 5,20$  cm und  $\angle CAM = \angle TAP_2 = 54,46^\circ$  gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TP_2}} = \frac{\sin \angle AP_2 T}{\sin 54,46^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin \angle AP_2 T = \frac{\overline{AT} \cdot \sin 54,46^\circ}{\overline{TP_2}}$$

$$\Rightarrow \sin \angle A P_2 T = \frac{5 \cdot \sin 54,46^\circ}{5,2}$$

$$\Rightarrow \angle A P_2 T \approx 51,48^\circ$$

$$\frac{\overline{A P_2}}{\overline{A T}} = \frac{\sin \angle A T P_2}{\sin \angle A P_2 T}$$

$$\Rightarrow \overline{A P_2} = \frac{\overline{A T} \cdot \sin \angle A T P_2}{\sin \angle A P_2 T}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Also hat der Winkel  $\angle A T P_2$  eine Größe von  $180^\circ - 54,46^\circ - 51,48^\circ = 74,06^\circ$ .

$$\Rightarrow \overline{A P_2} = \frac{5 \cdot \sin 74,06^\circ}{\sin 51,48^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{A P_2} \approx 6,14 \text{ cm}$$

#### Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[C P_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

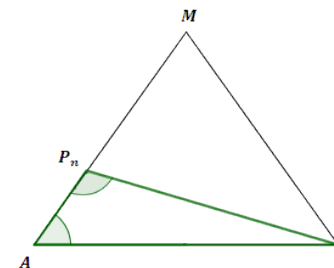
$$\overline{C P_n}(\varphi) = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

#### Lösung zu Aufgabe B1.4

##### Länge einer Strecke

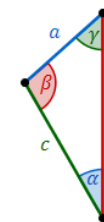
Gesucht:  $\overline{C P_n}(\varphi)$

Man betrachtet das Dreieck  $AC P_n$ .



In diesem Dreieck sind  $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$  und  $\angle C A P_n = \angle C A M = 54,46^\circ$  gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $AC P_n$  gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle A P_n C} = \frac{\overline{C P_n}}{\sin \angle C A P_n}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Also hat der Winkel  $\angle AP_nC$  eine Größe von  $180^\circ - (54,46^\circ + \varphi)$ .

$$\frac{10}{\sin(180^\circ - (54,46^\circ + \varphi))} = \frac{\overline{CP_n}}{\sin 54,46^\circ}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin x = \sin(180^\circ - x)$$

$$\frac{10}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} = \frac{\overline{CP_n}}{\sin 54,46^\circ} \quad | \cdot \sin 54,46^\circ$$

$$\overline{CP_n} = \frac{10 \cdot \sin 54,46^\circ}{\sin(54,46^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{CP_n}(\varphi) = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

#### Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Punkte  $P_n$  sind die Spitzen von Pyramiden  $ABCDP_n$  mit den Höhen  $[P_nK_n]$ , deren Fußpunkte  $K_n$  auf der Strecke  $[AT]$  liegen.

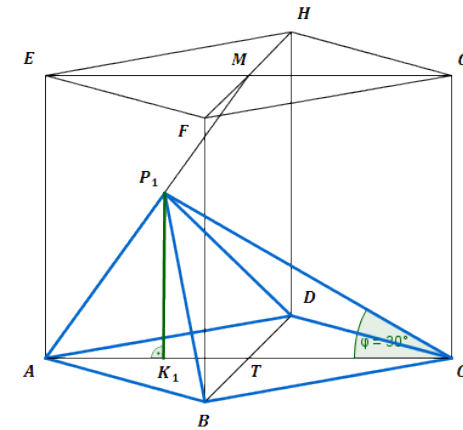
Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCDP_1$  und ihre Höhe  $[P_1K_1]$  in das Schrägbild zu 1.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCDP_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

#### Lösung zu Aufgabe B1.5

##### Skizze

Pyramide  $ABCDP_1$  und Höhe  $[P_1K_1]$  einzeichnen:



#### Volumen einer Pyramide

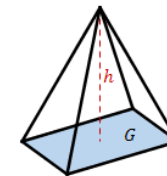
Gegeben:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}, \quad \overline{BD} = 6 \text{ cm}$$

Gesucht:

Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCDP_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

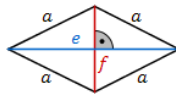
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche  $G$  ist die Raute  $ABCD$ .

Die Höhe  $h$  ist die Strecke  $[P_n K_n]$ .

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen  $e$  und  $f$  hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

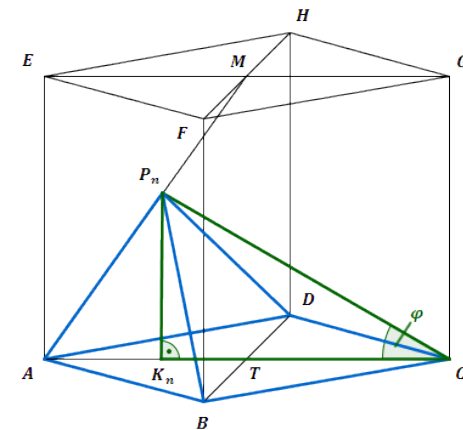
In der Raute  $ABCD$  gilt:

$$e = \overline{AC} = 10 \text{ cm}, \quad f = \overline{BD} = 6 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \overline{P_n K_n} = 10 \cdot \overline{P_n K_n}$$

Zur Berechnung von  $\overline{P_n K_n}$  wird das rechtwinklige Dreieck  $K_n C P_n$  betrachtet.



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck  $K_n C P_n$  gilt:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{P_n K_n}}{\overline{C P_n}} \quad | \quad \cdot \overline{C P_n} \quad \left( \overline{C P_n} = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ vgl. Aufgabe 1.4} \right)$$

$$\overline{P_n K_n} = \sin \varphi \cdot \overline{C P_n} = \sin \varphi \cdot \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)}$$

$$V = 10 \cdot \overline{P_n K_n}$$

$$\Rightarrow V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$$

#### Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide  $ABCDP_3$  beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas  $ABCDEFGH$ .



Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

### Lösung zu Aufgabe B1.6

#### Volumen eines Prismas

Gegeben:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}, \overline{BD} = 6 \text{ cm}, \overline{AE} = 7 \text{ cm}$$

Zunächst muss das Volumen des Prismas  $ABCDEFGH$  berechnet werden.

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

Ein Prisma mit der Grundfläche  $G$  und der Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

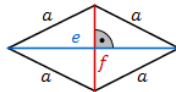
$$V = G \cdot h$$

$$V = G \cdot h$$

Die Grundfläche  $G$  ist die Raute  $ABCD$ .

Die Höhe  $h$  ist die Strecke  $[AE]$ .

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen  $e$  und  $f$  hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

In der Raute  $ABCD$  gilt:

$$e = \overline{AC} = 10 \text{ cm}, f = \overline{BD} = 6 \text{ cm}$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot h$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \text{ cm}^3$$

#### Winkel bestimmen

$$\text{Gegeben: } V_{Pyramide}(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$$

Das Volumen der Pyramide  $ABCDP_3$  beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas  $ABCDEFGH$ .

$$\Rightarrow V_{ABCDP_3} = \frac{1}{4} \cdot V_{Prisma}$$

$$\frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} = \frac{1}{4} \cdot 210 \quad | \cdot \sin(54,46^\circ + \varphi)$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot \sin(54,46^\circ + \varphi)$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot (\sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi + \cos 54,46^\circ \cdot \sin \varphi)$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi + 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ \cdot \sin \varphi$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \varphi \cdot (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ) = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi \quad | : \cos \varphi$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels  $\alpha$  gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi \cdot (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ) = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \quad | : (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ)$$

$$\tan \varphi = \frac{52,5 \cdot \sin 54,46^\circ}{81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ} \quad | \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 40,02^\circ$$

