Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 1,5^{x+2} - 4$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-7; 2]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8 \leqq x \leqq 4$; $-6 \leqq y \leqq 4$.

Aufgabe B2.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$ abgebildet $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 2.1 ein und ermitteln Sie durch Rechnung den Affinitätsmaßstab k.

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x| -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $B_n(x|1,5^{x+2} - 4)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind für $x < 0,28$ zusammen mit Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Trapezen $A_n B_n C_n D_n$. Die Punkte D_n liegen auf dem Graphen zu f_2. Ihre x-Koordinate ist stets um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n. Es gilt: $A_n B_n \parallel D_n C_n$ und $\overline{D_n C_n} = 3\,\text{LE}$.
Zeichnen Sie das Trapez $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -7$ und das Trapez $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -2,5$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x) = (-6,25 \cdot 1,5^x + 10)\text{FE}$.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Das Trapez $A_3 B_3 C_3 D_3$ hat den Flächeninhalt $8\,\text{FE}$.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes D_3. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Eckpunkt A_4 des Trapezes $A_4 B_4 C_4 D_4$ hat die x-Koordinate $-3,5$.
Zeichnen Sie das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.
Überprüfen Sie sodann rechnerisch, ob das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ gleichschenklig ist.
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe B2.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 1,5^{x+2} - 4$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-7; 2]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8 \leqq x \leqq 4$; $-6 \leqq y \leqq 4$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Definitionsmenge einer Funktion

Gesucht: Definitionsmenge von $f_1 : y = 1,5^{x+2} - 4$

> Erläuterung: *Definitionsbereich einer Funktion*
>
> Die Definitionsmenge einer Exponentialfunktion $f = a^x$ ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, da für alle reelle Zahlen Funktionswerte gebildet werden können.

D = $\mathbb{R}$

Wertemenge einer Funktion

Gesucht: Wertemenge von $f_1 : y = 1,5^{x+2} - 4$

> Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*
>
> Die Funktion $y = 1,5^{x+2} - 4$ ist eine Exponentialfunktion.
>
> Der Term $1,5^{x+2}$ kann für alle $x - Werte$ nur positive Werte annehmen; er wird sozusagen nie „Null“. Deswegen wird die Funktion $y = 1,5^{x+2} - 4$ nie den Wert -4 annehmen.
>
> $\Rightarrow \quad W_f =]-4;$
>
> Für große $x - Werte$ verläuft die Funktion $y = 1,5^{x+2} - 4$ ins „Unendliche“.
>
> $\Rightarrow \quad W_f =]-4; +\infty[$

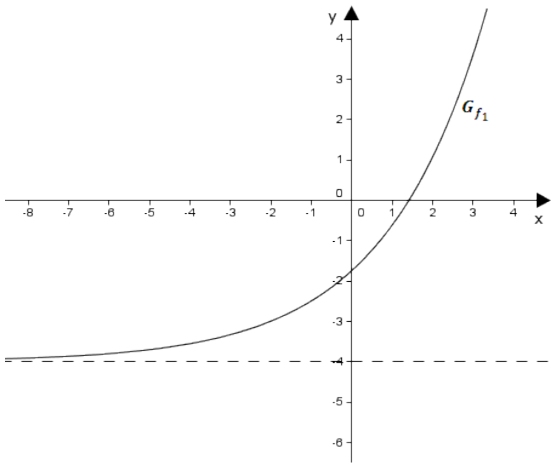
$W_f =]-4; +\infty[$

Skizze

Wertetabelle:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$-3,87$	$-3,8$	$-3,7$	$-3,56$	$-3,33$	-3	$-2,5$	$-1,75$	$-0,63$	$1,06$

G_{f_1} einzeichnen:



Aufgabe B2.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$ abgebildet $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 2.1 ein und ermitteln Sie durch Rechnung den Affinitätsmaßstab k.

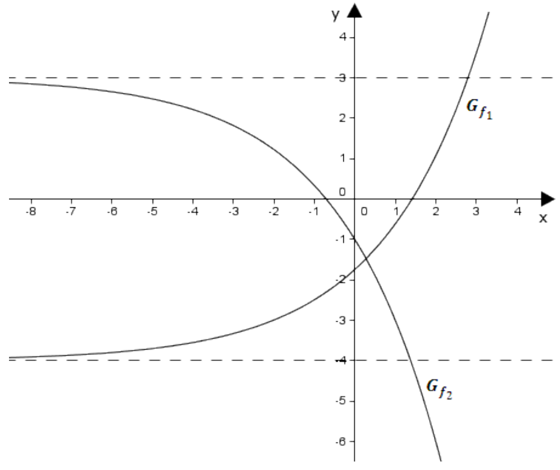
Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

Wertetabelle:

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$f_2(x)$	2.77	2.65	2.47	2.21	1.81	1.22	0.33	−1	−3	−6

G_{f_2} einzeichnen:



Orthogonale Affinität

$f_1 : y = 1,5^{x+2} - 4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+2} - 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Matrixdarstellung einer orthogonalen Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und einem Affinitätsmaßstab k:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+2} - 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot (1,5^{x+2} - 4) \end{pmatrix}$$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot (1,5^{x+2} - 4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ k \cdot (1,5^{x+2} - 4) - 13 \end{pmatrix}$$

$x'' = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = x'' - 2$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = x'' - 2$ wird in y'' eingesetzt.

$y'' = k \cdot (1,5^{x+2} - 4) - 13$

$y'' = k \cdot (1,5^{x''-2+2} - 4) - 13$

$y'' = k \cdot (1,5^{x''} - 4) - 13$

$y'' = k \cdot 1,5^{x''} - 4k - 13$

Erläuterung:

Anstelle von y'' und x'' wird y und x geschrieben.

Nun erhält man die Gleichung der Funktion f_2 in Abhängigkeit von k:

$f_2(k) : y = k \cdot 1,5^x - 4k - 13$

Parameterwerte ermitteln

Gegeben: $f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$

Um k zu bestimmen, müssen die Koeffizienten der beiden Gleichungen verglichen werden.

Dies ist aber erst möglich, wenn $1,5$ in beiden Gleichungen denselben Exponenten besitzt.

$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel, die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Hier:

$1,5^{x-1} = 1,5^x \cdot 1,5^{-1}$

$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^x \cdot 1,5^{-1} + 3$

$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{-1} \cdot 1,5^x + 3$

Nun folgt der Koeffizientenvergleich in den Gleichungen

$f_2(k) : y = k \cdot 1,5^x - 4k - 13$ und

$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{-1} \cdot 1,5^x + 3.$

I. $k = -6 \cdot 1,5^{-1}$

II. $-4k - 13 = 3$

zu I.: $k = -6 \cdot 1,5^{-1} = -4$

zu II.: $-4k - 13 = 3 \quad | \quad +13$

$-4k = 16 \quad | \quad : (-4)$

$k = -4$

$\Rightarrow \quad k = -4$

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|-6\cdot 1,5^{x-1}+3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $B_n(x|1,5^{x+2}-4)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind für $x<0,28$ zusammen mit Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Trapezen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Punkte D_n liegen auf dem Graphen zu f_2. Ihre x-Koordinate ist stets um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n. Es gilt: $A_n\,B_n \parallel D_n\,C_n$ und $\overline{D_n\,C_n}=3\,\text{LE}$.
Zeichnen Sie das Trapez $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x=-7$ und das Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x=-2,5$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Skizze

Trapez $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x=-7$ und Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x=-2,5$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Der Punkt A_1 wird bei $x=-7$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

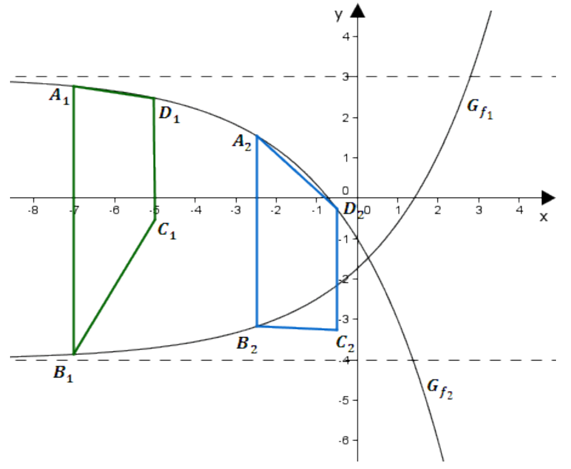
Der Punkt B_1 wird bei $x=-7$ auf G_{f_1} eingezeichnet.

Der Punkt D_1 wird bei $x=-7+2=-5$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

Der Punkt C_1 wird 3 LE genau senkrecht unter dem Punkt D_1 eingezeichnet.

Die Punkte werden zum Trapez $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ verbunden.

Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ analog.



Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x)=(-6,25\cdot 1,5^x+10)\text{FE}$.

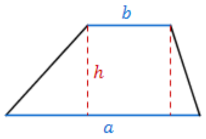
Lösung zu Aufgabe B2.4

Flächeninhalt eines Trapezes

Gegeben: $A_n(x|-6\cdot 1,5^{x-1}+3)$, $B_n(x|1,5^{x+2}-4)$, $\overline{D_n\,C_n}=3\,LE$

Gesucht: $A(x)$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

Hier gilt:

$a = \overline{A_n\, B_n}, \qquad b = \overline{D_n\, C_n} = 3\, L\, E, \qquad h = 2\, L\, E$

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

$A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_n\, B_n} + \overline{D_n\, C_n}) \cdot 2$

$A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_n\, B_n} + 3) \cdot 2$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Die Strecke $[A_n\, B_n]$ ist parallel zur y-Achse.

Deshalb wird $\overline{A_n\, B_n}$ berechnet, indem man den y-Wert von B_n vom y-Wert von A_n abzieht:

$\overline{A_n\, B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$

$\overline{A_n\, B_n} = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3 - (1,5^{x+2} - 4)$

$\overline{A_n\, B_n} = -6 \cdot 1,5^{x-1} - 1,5^{x+2} + 7$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel, die verwendet wird: $\quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$\overline{A_n\, B_n} = -6 \cdot 1,5^x \cdot 1,5^{-1} - 1,5^x \cdot 1,5^2 + 7$

$\overline{A_n\, B_n} = -4 \cdot 1,5^x - 2,25 \cdot 1,5^x + 7$

$\overline{A_n\, B_n} = 1,5^x \cdot (-4 - 2,25) + 7$

$\overline{A_n\, B_n} = -6,25 \cdot 1,5^x + 7$

$A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_n\, B_n} + 3) \cdot 2$

$A = \frac{1}{2} \cdot (-6,25 \cdot 1,5^x + 7 + 3) \cdot 2$

$\Rightarrow \quad A(x) = -6,25 \cdot 1,5^x + 10$

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Das Trapez $A_3\, B_3\, C_3\, D_3$ hat den Flächeninhalt 8 FE.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes D_3. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A = 8\, F\, E,\ A(x) = (-6,25 \cdot 1,5^x + 10) F\, E$

Erläuterung:

$A = 8$ wird in die Gleichung $A = -6,25 \cdot 1,5^x + 10$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$8 = -6,25 \cdot 1,5^x + 10 \quad | \quad -10$

$-2 = -6,25 \cdot 1,5^x \quad | \quad : (-6,25)$

$0,32 = 1,5^x \quad | \quad \log_{1,5}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,5}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$\log_{1,5} 0,32 = x$

$x \approx -2,81$

Dies ist die x-Koordinate des Punktes A_3.

Erläuterung: *Erläuterung*

Die x-Koordinate von D_3 ist (laut Kontruktion) um 2 größer als die Abszisse x des Punktes A_3.

$\Rightarrow \quad x_{D_3} = -2,81 + 2 = -0,81$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Eckpunkt A_4 des Trapezes $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ hat die x-Koordinate $-3,5$.
Zeichnen Sie das Trapez $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.
Überprüfen Sie sodann rechnerisch, ob das Trapez $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ gleichschenklig ist.
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Skizze

Trapez $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

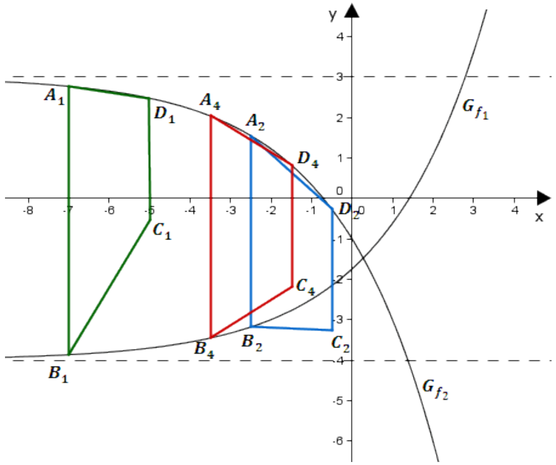
Der Punkt A_4 wird bei $x = -3,5$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

Der Punkt B_4 wird bei $x = -3,5$ auf G_{f_1} eingezeichnet.

Der Punkt D_4 wird bei $x = -3,5 + 2 = -1,5$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

Der Punkt C_4 wird 3 LE genau senkrecht unter dem Punkt D_1 eingezeichnet.

Die Punkte werden zum Trapez $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ verbunden.



Eigenschaften eines gleichschenkligen Trapezes

Gegeben:

$x_{A_4} = -3,5$

$A_n(x| -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3)$

$B_n(x|1,5^{x+2} - 4)$

Zuerst werden die Koordinaten der Eckpunkte des Trapezes $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ berechnet.

$x_{A_4} = -3,5, \qquad y_{A_4} = -6 \cdot 1,5^{-3,5-1} + 3 \approx 2,03$

$\Rightarrow \qquad A_4(-3,5|2,03)$

$x_{B_4} = -3,5, \qquad y_{B_4} = 1,5^{-3,5+2} - 4 \approx -3,46$

$\Rightarrow \qquad B_4(-3,5|-3,46)$

$x_{D_4} = -3,5 + 2 = -1,5, \qquad y_{D_4} = -6 \cdot 1,5^{-1,5-1} + 3 \approx 0,82$

$\Rightarrow \qquad D_4(-1,5|0,82)$

$x_{C_4} = -1,5, \qquad y_{C_4} = y_{D_4} - 3 = 0,82 - 3 \approx -2,18 \qquad$ (wegen $\overline{D_n\,C_n} = 3\,L\,E$)

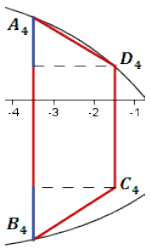
$\Rightarrow \qquad C_4(-1,5|-2,18)$

Erläuterung: *Gleichschenkliges Trapez*

Das Trapez $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ ist gleichschenklig, wenn die Strecke $[C_4\,D_4]$ genau mittig über der Strecke $[A_4\,B_4]$ liegt.

Dies ist der Fall, wenn gilt:

$y_{A_4} - y_{D_4} = y_{C_4} - y_{B_4}$



$y_{A_4} - y_{D_4} = 2,03 - 0,82 = 1,21$

$y_{C_4} - y_{B_4} = -2,18 - (-3,46) = 1,28$

$\Rightarrow \qquad$ Das Trapez $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ ist nicht gleichschenklig.