

Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 1,5^{x+2} - 4$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-7; 2]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8 \leq x \leq 4$; $-6 \leq y \leq 4$.

Aufgabe B2.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$ abgebildet ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 2.1 ein und ermitteln Sie durch Rechnung den Affinitätsmaßstab k .

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x | -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $B_n(x | 1,5^{x+2} - 4)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind für $x < 0,28$ zusammen mit Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Trapezen $A_n B_n C_n D_n$. Die Punkte D_n liegen auf dem Graphen zu f_2 . Ihre x -Koordinate ist stets um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n . Es gilt: $A_n B_n \parallel D_n C_n$ und $\overline{D_n C_n} = 3 \text{ LE}$. Zeichnen Sie das Trapez $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -7$ und das Trapez $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -2,5$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$A(x) = (-6,25 \cdot 1,5^x + 10) \text{ FE.}$$

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Das Trapez $A_3 B_3 C_3 D_3$ hat den Flächeninhalt 8 FE.

Berechnen Sie die x -Koordinate des Punktes D_3 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Eckpunkt A_4 des Trapezes $A_4 B_4 C_4 D_4$ hat die x -Koordinate $-3,5$.

Zeichnen Sie das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Überprüfen Sie sodann rechnerisch, ob das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ gleichschenkelig ist.

Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.



Lösung

Aufgabe B2.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 1,5^{x+2} - 4$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-7; 2]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8 \leq x \leq 4$; $-6 \leq y \leq 4$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Definitionsmenge einer Funktion

Gesucht: Definitionsmenge von $f_1 : y = 1,5^{x+2} - 4$

Erläuterung: *Definitionsbereich einer Funktion*

Die Definitionsmenge einer Exponentialfunktion $f = a^x$ ist die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} , da für alle reelle Zahlen Funktionswerte gebildet werden können.

$D = \mathbb{R}$

Wertemenge einer Funktion

Gesucht: Wertemenge von $f_1 : y = 1,5^{x+2} - 4$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Die Funktion $y = 1,5^{x+2} - 4$ ist eine Exponentialfunktion.

Der Term $1,5^{x+2}$ kann für alle x -Werte nur positive Werte annehmen; er wird sozusagen nie „Null“. Deswegen wird die Funktion $y = 1,5^{x+2} - 4$ nie den Wert -4 annehmen.

$$\Rightarrow W_f =] - 4;$$

Für große x -Werte verläuft die Funktion $y = 1,5^{x+2} - 4$ ins „Unendliche“.

$$\Rightarrow W_f =] - 4; +\infty[$$

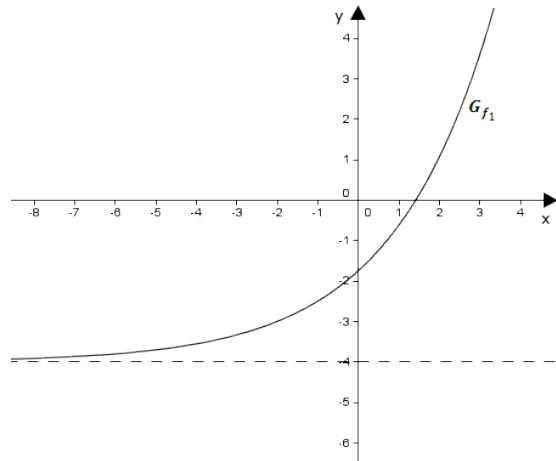
$W_f =] - 4; +\infty[$

Skizze

Wertetabelle:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	-3.87	-3.8	-3.7	-3.56	-3.33	-3	-2.5	-1.75	-0.63	1.06

G_{f_1} einzeichnen:

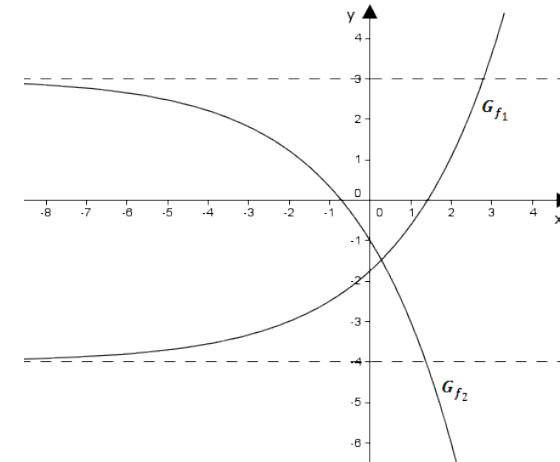
**Aufgabe B2.2** (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$ abgebildet ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 2.1 ein und ermitteln Sie durch Rechnung den Affinitätsmaßstab k .

Lösung zu Aufgabe B2.2**Skizze**

Wertetabelle:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_2(x)$	2.77	2.65	2.47	2.21	1.81	1.22	0.33	-1	-3	-6

 G_{f_2} einzeichnen:**Orthogonale Affinität**

$$f_1 : y = 1,5^{x+2} - 4$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Matrixdarstellung einer orthogonalen Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und einem Affinitätsmaßstab k :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+2} - 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot (1,5^{x+2} - 4) \end{pmatrix}$$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot (1,5^{x+2} - 4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ k \cdot (1,5^{x+2} - 4) - 13 \end{pmatrix}$$

$$x'' = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = x'' - 2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = x'' - 2$ wird in y'' eingesetzt.

$$y'' = k \cdot (1,5^{x+2} - 4) - 13$$

$$y'' = k \cdot (1,5^{x''-2+2} - 4) - 13$$

$$y'' = k \cdot (1,5^{x''} - 4) - 13$$

$$y'' = k \cdot 1,5^{x''} - 4k - 13$$

Erläuterung:

Anstelle von y'' und x'' wird y und x geschrieben.

Nun erhält man die Gleichung der Funktion f_2 in Abhängigkeit von k :

$$f_2(k) : y = k \cdot 1,5^x - 4k - 13$$

Parameterwerte ermitteln

Gegeben: $f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$

Um k zu bestimmen, müssen die Koeffizienten der beiden Gleichungen verglichen werden.

Dies ist aber erst möglich, wenn $1,5$ in beiden Gleichungen denselben Exponenten besitzt.

$$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel, die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Hier:

$$1,5^{x-1} = 1,5^x \cdot 1,5^{-1}$$

$$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^x \cdot 1,5^{-1} + 3$$

$$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{-1} \cdot 1,5^x + 3$$

Nun folgt der Koeffizientenvergleich in den Gleichungen

$$f_2(k) : y = k \cdot 1,5^x - 4k - 13 \quad \text{und}$$

$$f_2 : y = -6 \cdot 1,5^{-1} \cdot 1,5^x + 3.$$

$$\text{I. } k = -6 \cdot 1,5^{-1}$$

$$\text{II. } -4k - 13 = 3$$

$$\text{zu I.: } k = -6 \cdot 1,5^{-1} = -4$$

$$\text{zu II.: } -4k - 13 = 3 \quad | \quad +13$$

$$-4k = 16 \quad | \quad : (-4)$$

$$k = -4$$

$$\Rightarrow k = -4$$

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x| -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $B_n(x| 1,5^{x+2} - 4)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind für $x < 0,28$ zusammen mit Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Trapezen $A_n B_n C_n D_n$. Die Punkte D_n liegen auf dem Graphen zu f_2 . Ihre x -Koordinate ist stets um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n . Es gilt: $\overline{A_n B_n} \parallel \overline{D_n C_n}$ und $\overline{D_n C_n} = 3 \text{ LE}$. Zeichnen Sie das Trapez $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -7$ und das Trapez $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -2,5$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Skizze

Trapez $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -7$ und Trapez $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -2,5$ einzeichnen:

Erläuterung: Einzeichnen

Der Punkt A_1 wird bei $x = -7$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

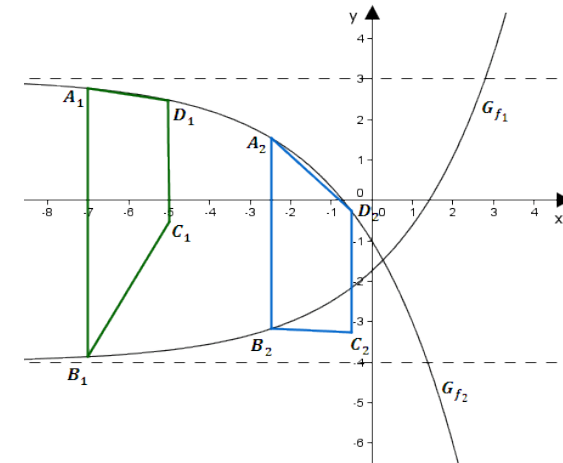
Der Punkt B_1 wird bei $x = -7$ auf G_{f_1} eingezeichnet.

Der Punkt D_1 wird bei $x = -7 + 2 = -5$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

Der Punkt C_1 wird 3 LE genau senkrecht unter dem Punkt D_1 eingezeichnet.

Die Punkte werden zum Trapez $A_1 B_1 C_1 D_1$ verbunden.

Trapez $A_2 B_2 C_2 D_2$ analog.



Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$A(x) = (-6,25 \cdot 1,5^x + 10) \text{ FE.}$$

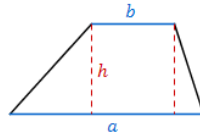
Lösung zu Aufgabe B2.4

Flächeninhalt eines Trapezes

Gegeben: $A_n(x| -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3)$, $B_n(x| 1,5^{x+2} - 4)$, $\overline{D_n C_n} = 3 \text{ LE}$

Gesucht: $A(x)$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Hier gilt:

$$a = \overline{A_n B_n}, \quad b = \overline{D_n C_n} = 3 \text{ LE}, \quad h = 2 \text{ LE}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_n B_n} + \overline{D_n C_n}) \cdot 2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_n B_n} + 3) \cdot 2$$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Die Strecke $[A_n B_n]$ ist parallel zur y -Achse.

Deshalb wird $\overline{A_n B_n}$ berechnet, indem man den y -Wert von B_n vom y -Wert von A_n abzieht:

$$\overline{A_n B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3 - (1,5^{x+2} - 4)$$

$$\overline{A_n B_n} = -6 \cdot 1,5^{x-1} - 1,5^{x+2} + 7$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel, die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$$\overline{A_n B_n} = -6 \cdot 1,5^x \cdot 1,5^{-1} - 1,5^x \cdot 1,5^2 + 7$$

$$\overline{A_n B_n} = -4 \cdot 1,5^x - 2,25 \cdot 1,5^x + 7$$

$$\overline{A_n B_n} = 1,5^x \cdot (-4 - 2,25) + 7$$

$$\overline{A_n B_n} = -6,25 \cdot 1,5^x + 7$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_n B_n} + 3) \cdot 2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (-6,25 \cdot 1,5^x + 7 + 3) \cdot 2$$

$$\Rightarrow A(x) = -6,25 \cdot 1,5^x + 10$$

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Das Trapez $A_3 B_3 C_3 D_3$ hat den Flächeninhalt 8 FE.

Berechnen Sie die x -Koordinate des Punktes D_3 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A = 8 \text{ FE}$, $A(x) = (-6,25 \cdot 1,5^x + 10) \text{ FE}$

Erläuterung:

$A = 8$ wird in die Gleichung $A = -6,25 \cdot 1,5^x + 10$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$8 = -6,25 \cdot 1,5^x + 10 \quad | \quad -10$$



$$-2 = -6,25 \cdot 1,5^x \quad | \quad : (-6,25)$$

$$0,32 = 1,5^x \quad | \quad \log_{1,5}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,5}$ aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } 2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$$

$$\log_{1,5} 0,32 = x$$

$$x \approx -2,81$$

Dies ist die x -Koordinate des Punktes A_3 .

Erläuterung: *Erläuterung*

Die x -Koordinate von D_3 ist (laut Konstruktion) um 2 größer als die Abszisse x des Punktes A_3 .

$$\Rightarrow x_{D_3} = -2,81 + 2 = -0,81$$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Eckpunkt A_4 des Trapezes $A_4 B_4 C_4 D_4$ hat die x -Koordinate $-3,5$.

Zeichnen Sie das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Überprüfen Sie sodann rechnerisch, ob das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ gleichschenkelig ist.

Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Skizze

Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

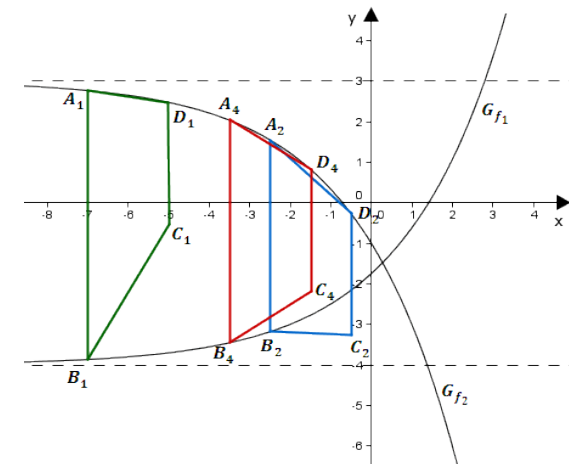
Der Punkt A_4 wird bei $x = -3,5$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

Der Punkt B_4 wird bei $x = -3,5$ auf G_{f_1} eingezeichnet.

Der Punkt D_4 wird bei $x = -3,5 + 2 = -1,5$ auf G_{f_2} eingezeichnet.

Der Punkt C_4 wird 3 LE genau senkrecht unter dem Punkt D_4 eingezeichnet.

Die Punkte werden zum Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ verbunden.



Eigenschaften eines gleichschenkligen Trapezes

Gegeben:

$$x_{A_4} = -3,5$$

$$A_n(x | -6 \cdot 1,5^{x-1} + 3)$$

$$B_n(x | 1,5^{x+2} - 4)$$

Zuerst werden die Koordinaten der Eckpunkte des Trapezes $A_4 B_4 C_4 D_4$ berechnet.

$$x_{A_4} = -3,5, \quad y_{A_4} = -6 \cdot 1,5^{-3,5-1} + 3 \approx 2,03$$

$$\Rightarrow A_4(-3,5|2,03)$$

$$x_{B_4} = -3,5, \quad y_{B_4} = 1,5^{-3,5+2} - 4 \approx -3,46$$

$$\Rightarrow B_4(-3,5|-3,46)$$

$$x_{D_4} = -3,5 + 2 = -1,5, \quad y_{D_4} = -6 \cdot 1,5^{-1,5-1} + 3 \approx 0,82$$

$$\Rightarrow D_4(-1,5|0,82)$$

$$x_{C_4} = -1,5, \quad y_{C_4} = y_{D_4} - 3 = 0,82 - 3 \approx -2,18 \quad (\text{wegen } \overline{D_n C_n} = 3LE)$$

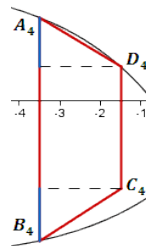
$$\Rightarrow C_4(-1,5|-2,18)$$

Erläuterung: *Gleichschenkliges Trapez*

Das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ ist gleichschenklig, wenn die Strecke $[C_4 D_4]$ genau mittig über der Strecke $[A_4 B_4]$ liegt.

Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$y_{A_4} - y_{D_4} = y_{C_4} - y_{B_4}$$



$$y_{A_4} - y_{D_4} = 2,03 - 0,82 = 1,21$$

$$y_{C_4} - y_{B_4} = -2,18 - (-3,46) = 1,28$$

\Rightarrow Das Trapez $A_4 B_4 C_4 D_4$ ist nicht gleichschenklig.