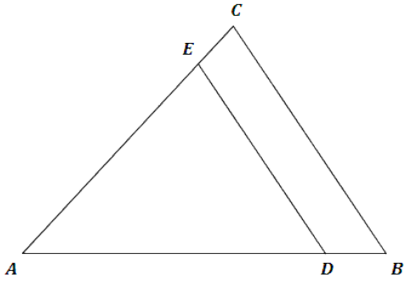
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1. (5 Punkte)

Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan eines dreieckigen Grundstücks ABC. Zum Bau einer neuen Straße muss ein Teil des Grundstücks abgetreten werden. Dabei verkürzen sich die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ jeweils um ein Sechstel ihrer ursprünglichen Länge auf die Seiten $[AD]$ und $[AE]$.
Es gilt: $\overline{AB} = 60$ m; $\overline{BC} = 45$ m; $\overline{AC} = 51$ m.

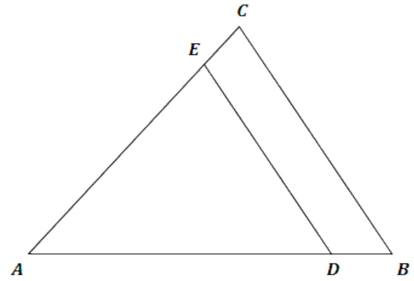


Berechnen Sie den Inhalt A_{DBCE} der abgetretenen Fläche und geben Sie an, um wie viel Prozent sich das Grundstück verkleinert hat.
[Teilergebnis: $\measuredangle BAC = 46,97°$]

Lösung

Aufgabe A1. (5 Punkte)

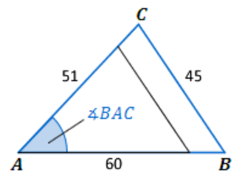
Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan eines dreieckigen Grundstücks ABC. Zum Bau einer neuen Straße muss ein Teil des Grundstücks abgetreten werden. Dabei verkürzen sich die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ jeweils um ein Sechstel ihrer ursprünglichen Länge auf die Seiten $[AD]$ und $[AE]$.
Es gilt: $\overline{AB} = 60$ m; $\overline{BC} = 45$ m; $\overline{AC} = 51$ m.



Berechnen Sie den Inhalt A_{DBCE} der abgetretenen Fläche und geben Sie an, um wie viel Prozent sich das Grundstück verkleinert hat.
[Teilergebnis: $\measuredangle BAC = 46,97°$]

Lösung zu Aufgabe A1.

Flächeninhalt eines Dreiecks

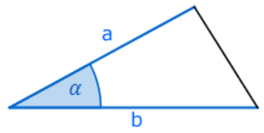


Alle drei Seitenlängen des ursprünglichen Grundstücks ABC sind gegeben:

$\overline{AB} = 60$ m; $\overline{BC} = 45$ m; $\overline{AC} = 51$ m

Somit lässt sich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC berechnen.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

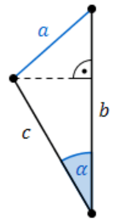
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin\measuredangle BAC$$

Winkel bestimmen

Das fehlende Maß des Winkels $\measuredangle BAC$ wird mit Hilfe des Kosinussatzes berechnet.

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Es gilt:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\measuredangle BAC$$

Umstellen:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\measuredangle BAC \quad | \quad +2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\measuredangle BAC - \overline{BC}^2$$

$$2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\measuredangle BAC = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \quad | \quad : (2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

$$\Rightarrow \quad \cos\measuredangle BAC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte $\overline{AB} = 60$ m, $\overline{BC} = 45$ m und $\overline{AC} = 51$ m werden in die Gleichung eingesetzt.

$$\cos\measuredangle BAC = \frac{60^2 + 51^2 - 45^2}{2 \cdot 60 \cdot 51}$$

$$\measuredangle BAC = \cos^{-1}\left(\frac{60^2 + 51^2 - 45^2}{2 \cdot 60 \cdot 51}\right)$$

$$\measuredangle BAC \approx 46{,}97^\circ$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Mit dem berechneten Winkel $\measuredangle BAC \approx 46,97°$ ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

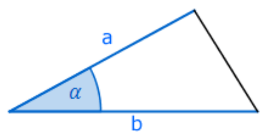
$$A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin\measuredangle BAC$$

$$A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 51 \cdot \sin 46,97°$$

$$A_{\Delta\, ABC} \approx 1118,42 \;\; \text{m}^2$$

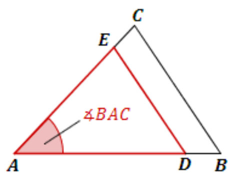
Nun wird auf die gleiche Art der Flächeninhalt des Dreiecks ADE berechnet.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$



$$A_{\Delta\, ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin\measuredangle BAC$$

$$A_{\Delta\, ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin 46,97°$$

$[AD]$ und $[AE]$ entstehen, indem man $[AB]$ und $[AC]$ jeweils um $\frac{1}{6}$ ihrer Länge verkürzt.

Erläuterung: *Ansatz*

$$\frac{1}{6} \text{ von } \overline{AB} \quad \hat{=} \quad \frac{1}{6} \cdot \overline{AB}$$

$$\frac{1}{6} \text{ von } \overline{AC} \quad \hat{=} \quad \frac{1}{6} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} - \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} = \frac{5}{6} \cdot \overline{AB} = \frac{5}{6} \cdot 60 = 50 \;\; \text{m}$$

$$\overline{AE} = \overline{AC} - \frac{1}{6} \cdot \overline{AC} = \frac{5}{6} \cdot \overline{AC} = \frac{5}{6} \cdot 51 = 42,5 \;\; \text{m}$$

Mit den berechneten Seitenlängen $\overline{AD} = 50 \;\; \text{m}$ und $\overline{AE} = 42,5 \;\; \text{m}$ ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ADE:

$$A_{\Delta\, ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin 46,97°$$

$$A_{\Delta\, ADE} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 42,5 \cdot \sin 46,97°$$

$$A_{\Delta\, ADE} \approx 776,68 \;\; \text{m}^2$$

Verhältnis von Teilflächen

Der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $DBCE$ ist die Differenz der beiden berechneten Dreiecksflächen:

$$A_{DBCE} = A_{\Delta\, ABC} - A_{\Delta\, ADE}$$

$$A_{DBCE} = 1118,42 - 776,68$$

$$A_{DBCE} = 341,74 \;\; \text{m}^2$$

Jetzt lässt sich der prozentuale Anteil der abgetretenen Fläche A_{DBCE} am ursprünglichen Grundstück A_{ABC} berechnen.

Erläuterung: *Dreisatz*

$1118,42 \quad \hat{=} \quad 100\%$

$341,74 \quad \hat{=} \quad x\%$

$\frac{341,74}{1118,42} = \frac{x}{100}$

$x = \frac{341,74}{1118,42} \cdot 100$

$\frac{341,74}{1118,42} \approx 0,3056 = 30,56\%$

Antwort: Das Grundstück hat sich um $30,56\%$ verkleinert.