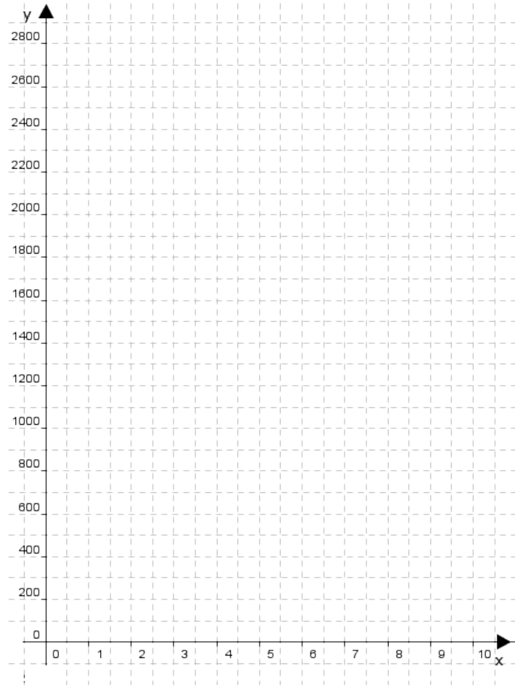
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Nachdem der nordamerikanische Waschbär nach Deutschland eingeschleppt worden war, konnte in einigen Gebieten festgestellt werden, dass die Anzahl der Waschbären jährlich um 27 % zunimmt.

Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Legt man dieses Wachstum zugrunde und geht von einem Anfangsbestand von 250 Waschbären in einem Beobachtungsgebiet am Jahresende 2012 aus, lässt sich der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der von diesem Zeitpunkt an vergangenen Jahre und der Anzahl y der Tiere annähernd durch die Exponentialfunktion f mit der Gleichung $y = 250 \cdot 1,27^x$ beschreiben ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$).
Zeichnen Sie den Graphen zu f für $x \in [0; 10]$ in das Koordinatensystem.



Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe des Graphen zu f, um wie viele Tiere der Bestand an Waschbären bis zum Ende des Jahres 2020 voraussichtlich zunehmen wird.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Waschbären voraussichtlich erstmals größer als 4900 sein wird.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung, am Ende welchen Jahres voraussichtlich erstmals über 900 Waschbären mehr als im Jahr zuvor registriert werden.

Aufgabe A2.5 (1 Punkt)

Durch die Zunahme des Waschbärenbestands in einem Gebiet ging die Anzahl an Kormoranen, einer Vogelart, von anfänglich 3600 Vögeln um jährlich 6% zurück.
Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Jahre und der Anzahl y der Kormorane lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschreiben ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+;\ y_0 \in \mathbb{R}^+;\ k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).
Geben Sie die Funktionsgleichung an.

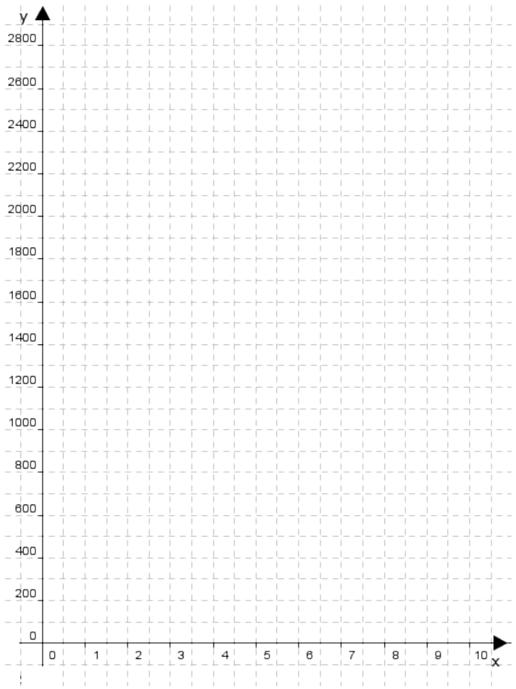
Lösung

Aufgabe A2.

Nachdem der nordamerikanische Waschbär nach Deutschland eingeschleppt worden war, konnte in einigen Gebieten festgestellt werden, dass die Anzahl der Waschbären jährlich um 27 % zunimmt.

Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Legt man dieses Wachstum zugrunde und geht von einem Anfangsbestand von 250 Waschbären in einem Beobachtungsgebiet am Jahresende 2012 aus, lässt sich der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der von diesem Zeitpunkt an vergangenen Jahre und der Anzahl y der Tiere annähernd durch die Exponentialfunktion f mit der Gleichung $y = 250 \cdot 1,27^x$ beschreiben ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$).
Zeichnen Sie den Graphen zu f für $x \in [0; 10]$ in das Koordinatensystem.



Lösung zu Aufgabe A2.1

Wertetabelle

$f: y = 250 \cdot 1,27^x$

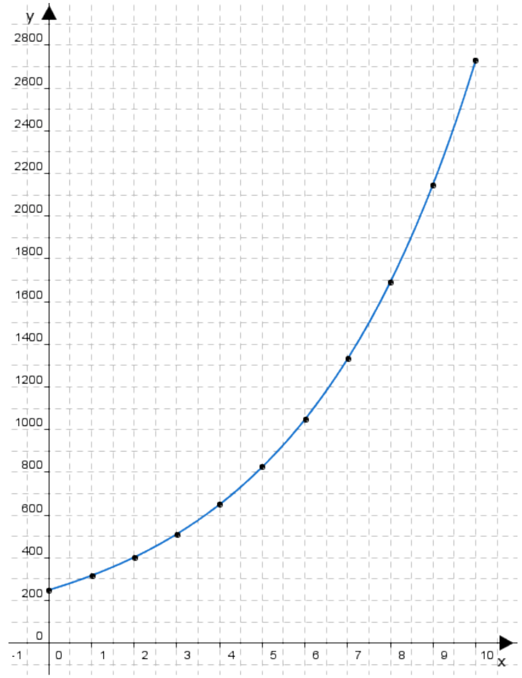
Wertetabelle erstellen:

Erläuterung: *Runden*

Es wird auf ganze Zahlen gerundet, da es sich um Tiere handelt.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	250	318	403	512	650	826	1049	1332	1692	2149	2729

Skizze

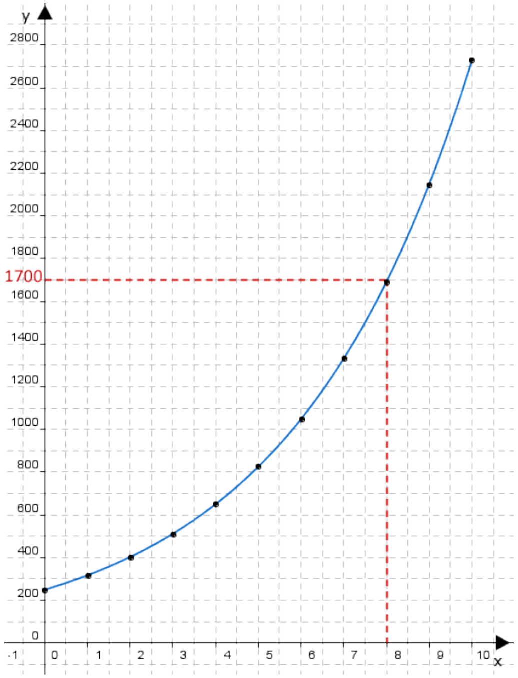


Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe des Graphen zu f, um wie viele Tiere der Bestand an Waschbären bis zum Ende des Jahres 2020 voraussichtlich zunehmen wird.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Werte am Graphen ablesen



Anzahl der Tiere 2012: 250

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Zwischen dem Ende 2012 und 2020 vergehen 8 Jahre. Am Graphen wird der y-Werte für $x = 8$ abgelesen.

Anzahl der Tiere 2020: ca. 1700

Der Bestand wird um ca. $1700 - 250 = 1450$ Tiere zunehmen.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Waschbären voraussichtlich erstmals größer als 4900 sein wird.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Exponentielles Wachstum

$y = 4900$

> Erläuterung: *Gleichsetzen*
>
> Man setzt hier gleich und rundet später auf. Gefragt ist ja nach dem Jahr an dem der Bestand erstmals <u>größer</u> als 4900 wird.

$250 \cdot 1,27^x = 4900 \qquad | \quad : 250$

> Erläuterung: *Logarithmieren*
>
> Die Exponentialfunktion $1,27^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,27}$ aufgehoben werden.
>
> Beispiel: $2^x = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 2^x = \log_2 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$

$1,27^x = \frac{4900}{250} \qquad | \quad \log_{1,27}$

$x = \log_{1,27} \frac{4900}{250}$

$x \approx 12,45$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Es wird nach dem Jahr gefragt an dem der Bestand erstmals <u>größer</u> als 4900 wird. Deswegen wird an dieser Stelle aufgerundet.

$2012 + 12,45 = 2024,45 \quad \Rightarrow \quad 2025$

Im Jahr 2025 wird die Anzahl der Waschbären erstmals größer als 4900 sein.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung, am Ende welchen Jahres voraussichtlich erstmals über 900 Waschbären mehr als im Jahr zuvor registriert werden.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Exponentielles Wachstum

Anzahl der Waschbären nach x Jahren: $250 \cdot 1,27^x$

Anzahl der Waschbären nach $x-1$ Jahren: $250 \cdot 1,27^{x-1}$

$250 \cdot 1,27^x - 250 \cdot 1,27^{x-1} = 900$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Hier wird folgende Potenzregel angewendet:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$250 \cdot 1,27^x - 250 \cdot 1,27^x \cdot 1,27^{-1} = 900$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $250 \cdot 1,27^x$ wird ausgeklammert.

$250 \cdot 1,27^x \cdot \left(1 - 1,27^{-1}\right) = 900 \qquad | \quad : 250 \cdot \left(1 - 1,27^{-1}\right)$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,27^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,27}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$$1,27^x = \frac{900}{250 \cdot \left(1 - 1,27^{-1}\right)} \qquad | \quad \log_{1,27}$$

$$x = \log_{1,27} \frac{900}{250 \cdot \left(1 - 1,27^{-1}\right)}$$

$x \approx 11,84$

Erläuterung: *Runden*

Es wird nach dem Jahr gefragt an dem der Bestand erstmals größer als 900 ist im Vergleich zum Vorjahr. Deswegen wird an dieser Stelle aufgerundet.

$2012 + 11,84 = 2023,84 \quad \Rightarrow \quad 2024$

Ende des Jahres 2024 werden voraussichtlich erstmals über 900 Waschbären mehr als im Vorjahr registriert.

Aufgabe A2.5 (1 Punkte)

Durch die Zunahme des Waschbärenbestands in einem Gebiet ging die Anzahl an Kormoranen, einer Vogelart, von anfänglich 3600 Vögeln um jährlich 6% zurück.
Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Jahre und der Anzahl y der Kormorane lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschreiben ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+;\ y_0 \in \mathbb{R}^+;\ k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).
Geben Sie die Funktionsgleichung an.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Exponentielles Wachstum

$y_0 = 3600$

Erläuterung: *Änderungsrate*

Die Änderungsrate k setzt sich zusammen aus $1+p$ bei positiven Wachstum bzw. $1-p$ bei negativen Wachstum (Zerfall oder Abnahme), wobei p die prozentuale Veränderung ist.

$k = 1 - 0,06 = 0,94$

$\Rightarrow \quad y = 3600 \cdot 0,94^x$