Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Gerade h mit der Gleichung $y = \frac{4}{5}x$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ist Symmetrieachse von Rauten $A_n B_n C_n D_n$. Die Diagonalen $[B_n D_n]$ der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ liegen auf der Geraden h. Die Punkte $A_n(x|2x + 3,5)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x + 3,5$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Die Abszisse der Punkte D_n ist stets um vier größer als die Abszisse x der Punkte A_n. Dabei gilt: $x \in]-2,92; 3,92[$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Geraden g und h sowie die Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -0,5$ und die Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 2$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 8$; $-3 \leqq y \leqq 9$.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $D_n(x + 4|0,8x + 3,2)$. Bestätigen Sie sodann durch Rechnung die untere Intervallgrenze $x = -2,92$ der Rauten $A_n B_n C_n D_n$.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, warum sich für $[A_n D_n] \perp h$ die obere Intervallgrenze $x = 3,92$ ergibt und bestätigen Sie diese durch Rechnung.

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte $A n$.
[Ergebnis: $C_n(2,17x + 3,41|0,54x - 0,77)$]

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Die Seite $[C_3 D_3]$ der Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ verläuft senkrecht zur x-Achse.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3.

Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

In der Raute $A_4 B_4 C_4 D_4$ hat die Diagonale $[A_4 C_4]$ die gleiche Länge wie die Seite $[A_4 D_4]$.
Begründen Sie, dass für die Diagonale $[B_4 D_4]$ gilt: $\overline{B_4 D_4} = \overline{A_4 D_4} \cdot \sqrt{3}$.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Gerade h mit der Gleichung $y = \frac{4}{5}x$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ist Symmetrieachse von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Diagonalen $[B_n\,D_n]$ der Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ liegen auf der Geraden h. Die Punkte $A_n(x|2x+3,5)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x + 3,5$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Die Abszisse der Punkte D_n ist stets um vier größer als die Abszisse x der Punkte A_n. Dabei gilt: $x \in]-2,92; 3,92[$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Geraden g und h sowie die Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = -0,5$ und die Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 2$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 8$; $-3 \leqq y \leqq 9$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Skizze

Gegeben: $A_n(x|2x+3,5)$; $x_{D_n} = x_{A_n} + 4$

Geraden g und h sowie Rauten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Gerade h einzeichnen

$m = \frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{4}{5} \rightarrow$ Auf der x-Achse 5 LE nach rechts und auf y-Achse 4 LE nach oben

2) Gerade g einzeichnen

$t = 3,5$ und $m = \frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{2}{1} \rightarrow$ Zum y- Achsenabschnitt t gehen, auf der x-Achse 1 LE nach rechts und auf y- Achse 4 LE nach oben

3) $A_1(-0,5|2 \cdot (-0,5) + 3,5) = A_1(-0,5|2,5)$ einzeichnen

4) D_1 für $x = -0,5 + 4 = 3,5$ auf der Geraden h einzeichnen

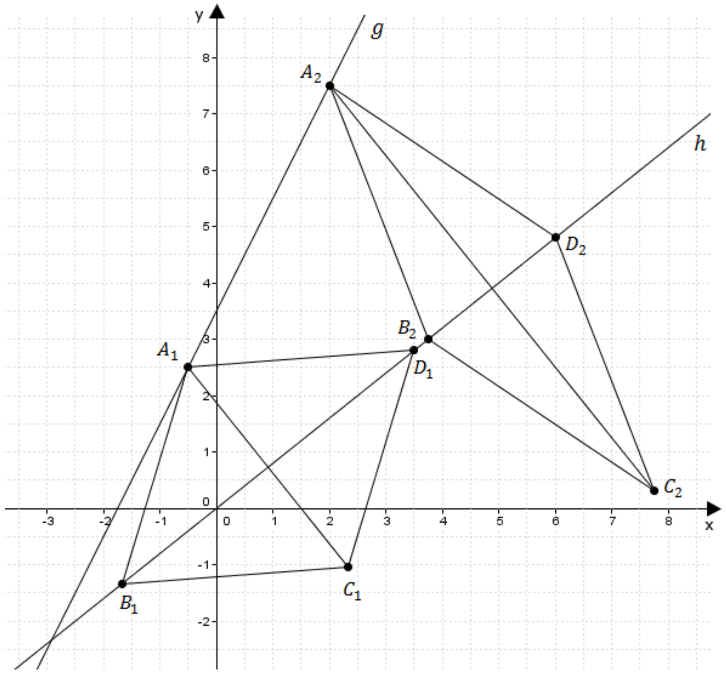
5) Es gilt: $\overline{A_1\,D_1} = \overline{A_1\,B_1}$ (Raute!)

Zirkel bei A_1 einstechen, $\overline{A_1\,D_1}$ abmessen und $\overline{A_1\,B_1}$ antragen (B_1 liegt auf h)

6) Spiegelung von A_1 an der Geraden h ergibt C_1

7) Punkte zur Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ verbinden

8) Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ analog mit $A_2(2|7,5)$



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $D_n(x+4|0,8x+3,2)$. Bestätigen Sie sodann durch Rechnung die untere Intervallgrenze $x=-2,92$ der Rauten $A_n B_n C_n D_n$.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

Die Abszisse der Punkte D_n ist stets um vier größer als die Abszisse x der Punkte A_n
$\Rightarrow \quad x_{D_n} = x + 4$

Punkte D_n liegen auf der Geraden $h: y = \frac{4}{5}x$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $x_{D_n} = x + 4$ wird in $y = \frac{4}{5}x$ eingesetzt

$y_{D_n} = \frac{4}{5} \cdot (x+4)$

$y_{D_n} = \frac{4}{5}x + \frac{16}{5} = 0,8x + 3,2$

$\Rightarrow \quad D_n(x+4|0,8x+3,2)$

Schnitt zweier Geraden

Gegeben: $\quad h: y = \frac{4}{5}x; \quad g: y = 2x + 3,5$

> Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*
>
> Rauten $A_n B_n C_n D_n$ existieren nur dann, wenn der Punkt A_n nicht auf dem Schnittpunkt der beiden Geraden g und h liegt.
>
> Deshalb wird zur Bestimmung der unteren Intervallgrenze der Schnittpunkt berechnet.

Geraden g und h schneiden:

> Erläuterung: *Schnitt zweier Geraden*
>
> Schema für das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Geraden:
>
> 1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
>
> 2. Alle Terme mit x auf eine Seite und alle Zahlen auf die andere Seite bringen.

$\frac{4}{5}x = 2x + 3,5 \qquad | \quad -2x$

$-1,2x = 3,5 \qquad | \quad : (-1,2)$

$x \approx -2,92$

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, warum sich für $[A_n D_n] \perp h$ die obere Intervallgrenze $x = 3,92$ ergibt und bestätigen Sie diese durch Rechnung.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Vektor bestimmen

Wenn $[A_n D_n]$ senkrecht auf h steht, so fallen die Punkte B_n und D_n zusammen.

$\Rightarrow$ Es werden keine Rauten mehr gebildet (obere Intervallgrenze).

Gegeben: $A_n(x|2x+3,5)$; $D_n(x+4|0,8x+3,2)$

Bestimmung von $\overrightarrow{A_n D_n}$:

Erläuterung: *Richtungsvektor, Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

In unseren Fall gilt also:

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} x_{D_n} - x_{A_n} \\ y_{D_n} - y_{A_n} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} x+4-x \\ 0,8x+3,2-(2x+3,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,2x-0,3 \end{pmatrix}$$

Gegeben: $h : y = \frac{4}{5}x = 0,8x$

Bestimmung des Richtungsvektors $\overrightarrow{v}$ von h:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Der x-Wert des Richtungsvektors einer Geraden ist 1, der y-Wert des Richtungsvektors ist die Steigung der Geraden.

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

Da $[A_n D_n] \perp$ h gilt also: $\overrightarrow{A_n D_n}$ senkrecht zu Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{A_n D_n} \circ \overrightarrow{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1,2x-0,3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$4 \cdot 1 + (-1,2x - 0,3) \cdot 0,8 = 0$

$4 - 0,96x - 0,24 = 0$

$3,76 - 0,96x = 0 \qquad | \quad -3,76$

$-0,96x = -3,76 \qquad | \quad : (-0,96)$

$x \approx 3,92$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte $A n$.
[Ergebnis: $C_n(2,17x + 3,41|0,54x - 0,77)$]

Lösung zu Aufgabe B1.4

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Punkte C_n entstehen durch Spiegelung der Punkte A_n an der Geraden h.

Gegeben: $h : y = 0,8x$

> Erläuterung: *Schnittwinkel*
>
> Für die Berechnung der Spiegelungsmatrix muss zuerst der Winkel α bestimmt werden, den die Gerade h mit der x-Achse einschließt.

Spiegelwinkel α bestimmen:

> Erläuterung: *Schnittwinkel*
>
> Für den Winkel α, den eine Gerade $g : y = m\,x + t$ mit der x-Achse einschließt, gilt:
>
> $m = \tan\alpha$

$\tan\alpha = 0,8$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 38,66°$

Spiegelungsmatrix bestimmen:

> Erläuterung: *Spiegelung*
>
> Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:
>
> $$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\cdot 38,66° & \sin 2\cdot 38,66° \\ \sin 2\cdot 38,66° & -\cos 2\cdot 38,66° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77,32° & \sin 77,32° \\ \sin 77,32° & -\cos 77,32° \end{pmatrix}$$

Gegeben: $A_n(x|2x + 3,5)$

Anwenden der Spiegelungsmatrix auf die Punkte A_n:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77,32° & \sin 77,32° \\ \sin 77,32° & -\cos 77,32° \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3,5 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*
>
> $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot x + b\cdot y \\ c\cdot x + d\cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77,32°\cdot x + \sin 77,32°\cdot(2x + 3,5) \\ \sin 77,32°\cdot x - \cos 77,32°\cdot(2x + 3,5) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77,32°\cdot x + 2\sin 77,32°\cdot x + 3,5\cdot\sin 77,32° \\ \sin 77,32°\cdot x - 2\cos 77,32°\cdot x - 3,5\cdot\cos 77,32° \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos 77,32° + 2\sin 77,32°)\cdot x + 3,5\cdot\sin 77,32° \\ (\sin 77,32° - 2\cos 77,32°)\cdot x - 3,5\cdot\cos 77,32° \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,17x + 3,41 \\ 0,54x - 0,77 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C_n(2,17x + 3,41|0,54x - 0,77)$

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Flächeninhalt einer Raute

Da die Raute eine achsensymmetrische Figur ist, besteht ihre Gesamtfläche aus zwei flächengleichen Dreiecken.

Die Koordinaten der Punkte A_n, C_n und D_n sind bekannt:

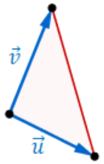
$A_n(x|2x+3,5)$ $C_n(2,17x+3,41|0,54x-0,77)$ $D_n(x+4|0,8x+3,2)$

Nun wird der Flächeninhalt der Dreicke $A_n\,C_n\,D_n$ berechnet.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$



Berechnung der Vektoren $\overrightarrow{D_n\,A_n}$ und $\overrightarrow{D_n\,C_n}$, welche die Dreiecke $A_n\,C_n\,D_n$ aufspannen:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Die Berechnung des Vektors $\overrightarrow{D_n\,A_n}$ mit den Punkten $A_n(x_{A_n}|y_{A_n})$ und $D_n(x_{D_n}|y_{D_n})$ erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“ :

$$\overrightarrow{D_n\,A_n} = \begin{pmatrix} x_{A_n} - x_{D_n} \\ y_{A_n} - y_{D_n} \end{pmatrix}$$

Analog wird der der Vektor $\overrightarrow{D_n\,C_n}$ berechnet.

$$\overrightarrow{D_n\,A_n} = \begin{pmatrix} x-(x+4) \\ 2x+3,5-(0,8x+3,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1,2x+0,3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_n\,C_n} = \begin{pmatrix} 2,17x+3,41-(x+4) \\ 0,54x-0,77-(0,8x+3,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,17x-0,59 \\ -0,26x-3,97 \end{pmatrix}$$

$$A_{\Delta\,A_n\,C_n\,D_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1,17x-0,59 \\ 1,2x+0,3 & -0,26x-3,97 \end{vmatrix}$$

Flächeninhalt der Raute:

$$A_{A_n\,B_n\,C_n\,D_n}(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1,17x-0,59 \\ 1,2x+0,3 & -0,26x-3,97 \end{vmatrix}$$

$$A_{A_n\,B_n\,C_n\,D_n}(x) = \begin{vmatrix} -4 & 1,17x-0,59 \\ 1,2x+0,3 & -0,26x-3,97 \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A_{A_n\,B_n\,C_n\,D_n}(x) = -4 \cdot (-0,26x-3,97) - (1,2x+0,3) \cdot (1,17x-0,59)$$

$$A_{A_n\,B_n\,C_n\,D_n}(x) = 1,04x + 15,88 - 1,40x^2 + 0,71x - 0,35x + 0,18)$$

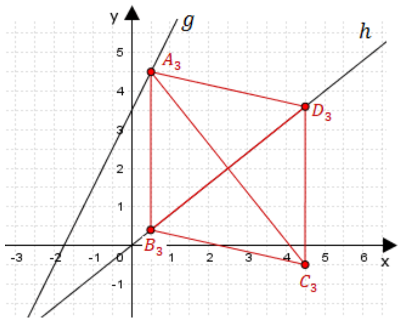
$$A_{A_n\,B_n\,C_n\,D_n}(x) = (-1,4x^2 + 1,4x + 16,06) \text{ FE}$$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Die Seite $[C_3\,D_3]$ der Raute $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ verläuft senkrecht zur x-Achse.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Koordinaten von Punkten ermitteln



Gegeben: $C_n(2,17x+3,41|0,54x-0,77)$, $D_n(x+4|0,8x+3,2)$

Wenn die Seite $[C_3\,D_3]$ senkrecht zur $x-$Achse verläuft, so haben die Punkte C_3 und D_3 den gleichen x-Wert.

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die x-Koordinaten der Punkte C_n und D_n werden gleichgesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst,

$2,17x+3,41 = x+4 \quad | \quad -x-3,41$

$1,17x = 0,59 \quad | \quad :1,17$

$x = 0,5$

Die Abszisse der Punkte D_n ist stets um vier größer als die Abszisse x der Punkte A_n

$\Rightarrow \quad x_{D_3} = 4+0,5 = 4,5$

Nun fehlt noch die y-Koordinate von D_3.

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 0,5$ wird in $y_{D_n} = 0,8x+3,2$ eingesetzt.

$y_{D_3} = 0,8\cdot 0,5+3,2 = 3,6$

$\Rightarrow \quad D_3(4,5|3,6)$

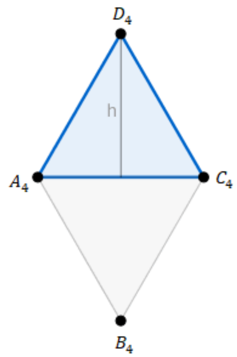
Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

In der Raute $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ hat die Diagonale $[A_4\,C_4]$ die gleiche Länge wie die Seite $[A_4\,D_4]$. Begründen Sie, dass für die Diagonale $[B_4\,D_4]$ gilt: $\overline{B_4\,D_4} = \overline{A_4\,D_4}\cdot\sqrt{3}$.

Lösung zu Aufgabe B1.7

Länge einer Strecke

Gegeben:



Die Diagonale $[B_4\,D_4]$ ist genau doppelt so lang wie die Höhe $[B_4\,M_4]$.

$$\left([B_4\,M_4] = \frac{1}{2}\cdot[B_4\,D_4]\right)$$

Also kommen wir über eine Berechnung der Höhe $[B_4\,M_4]$ automatisch auf die Länge von $[B_4\,D_4]$.

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet man mit folgender Formel:

$$h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

$$[B_4\, M_4] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot [A_4\, D_4]$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$[B_4\, M_4] = \dfrac{1}{2} \cdot [B_4\, D_4]$ wird in die Gleichung eingesetzt.

$$\frac{1}{2} \cdot [B_4\, D_4] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot [A_4\, D_4] \qquad | \quad \cdot 2$$

$$[B_4\, D_4] = \sqrt{3} \cdot [A_4\, D_4]$$