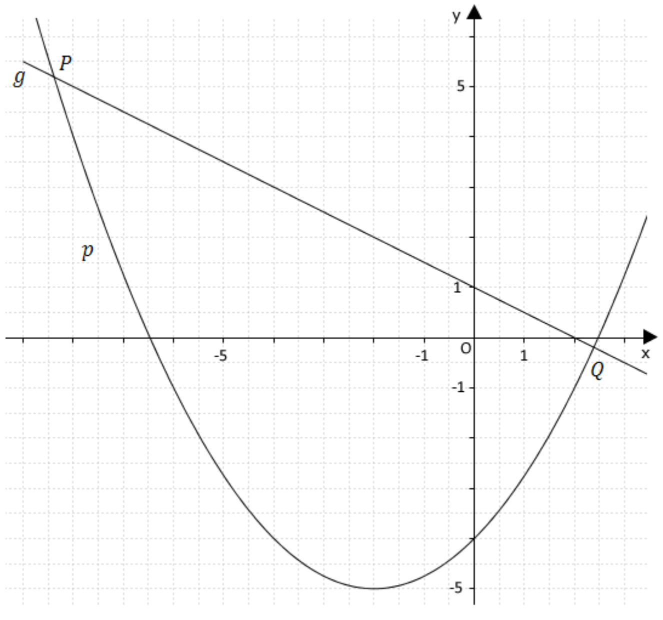
Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die Parabel p mit dem Scheitel $S(-2|-5)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + b\,x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 + x - 4$ hat.

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Die Gerade g schneidet die Parabel p in den Punkten P und Q.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n\left(x|0,25x^2 + x - 4\right)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x|-0,5x+1)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind für $-8,39 < x < 2,39$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g, wobei die Abszisse der Punkte C_n um 3 kleiner ist als die Abszisse x der Punkte A_n und B_n. Zeichnen Sie für $x_1 = -4$ das Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ und für $x_2 = 1$ das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Aufgabe A2.4 (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass für die Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt: $C_n(x-3|-0,5x+2,5)$

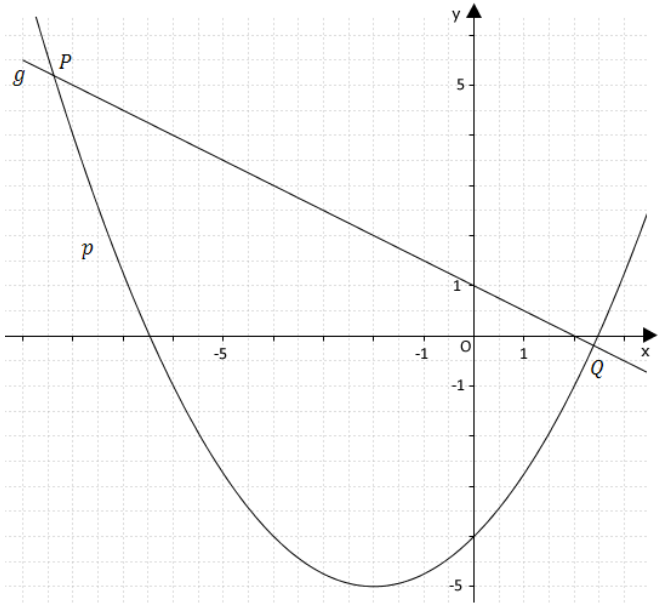
Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

In allen Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ haben die Winkel $C_n\,B_n\,A_n$ das gleiche Maß.
Berechnen Sie das Maß der Winkel $C_n\,B_n\,A_n$.

Lösung

Aufgabe A2.

Die Parabel p mit dem Scheitel $S(-2|-5)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + b\,x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 + x - 4$ hat.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Parameterwerte ermitteln

Gegeben: $S(-2|-5)$; $p : y = 0,25x^2 + b\,x + c$

Zu beweisen: $p : y = 0,25x^2 + x - 4$

> Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*
>
> Eine Parabel der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ kann auch in Scheitelform geschrieben werden: $y = a\,(x - x_0)^2 + y_0$ mit dem Scheitel $S(x_0|y_0)$

a ist bereits bekannt, b und c sind noch unbekannt.

$p : y = 0,25x^2 + b\,x + c = 0,25(x - x_0)^2 + y_0$

> Erläuterung: *Punktkoordinaten*
>
> Aus dem Graphen werden die Koordinaten des Scheitelpunktes abgelesen.
>
> $S(-2|-5)$

Einsetzten des Scheitelpunkts $S(-2|-5)$:

$p : y = 0,25(x - (-2))^2 + (-5)$

$p : y = 0,25(x + 2)^2 - 5$

> Erläuterung: *Binomische Formel*
>
> Erste binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$

$p : y = 0,25(x^2 + 4x + 4) - 5$

$p : y = 0,25x^2 + x + 1 - 5$

$p : y = 0,25x^2 + x - 4$

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Die Gerade g schneidet die Parabel p in den Punkten P und Q.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Schnittpunkt zweier Funktionen

Gegeben: $g : y = -0,5x + 1$; $p : y = 0,25x^2 + x - 4$

Gesucht: $g \cap p$ (Schnittpunkte von g und p)

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Schema füur das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:
>
> 1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
>
> 2. Gleichung nach x auflösen.

$-0,5x + 1 = 0,25x^2 + x - 4 \qquad | + 0,5x - 1$

$0,25x^2 + 1,5x - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0,25$; $b = 1,5$; $c = -5$

> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung kannst du, unter anderem, mit der Mitternachtsformel bestimmen.
>
> $a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot (-5)}}{2 \cdot 0,25}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 5}}{0,5}$$

$$x_{1,2} = 2\left(-1,5 \pm \sqrt{7,25}\right)$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 2 \cdot \sqrt{7,25}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2^2 \cdot 7,25}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{29} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & -8,39 \\ x_2 = & 2,39 \end{cases}$$

> Erläuterung: *Funktionswert*
>
> Die y- Koordinaten der Schnittpunkte werden berechnet, indem $x_1 = -8,38$ und $x_2 = 2,39$ in die Geradengleichung $g : y = -0,5x + 1$ eingesetzt werden.

y-Koordinaten:

$y_1 = g(x_1) = -0,5 \cdot -8,39 + 1 = 5,20$

$y_2 = g(x_2) = -0,5 \cdot 2,39 + 1 = -0,20$

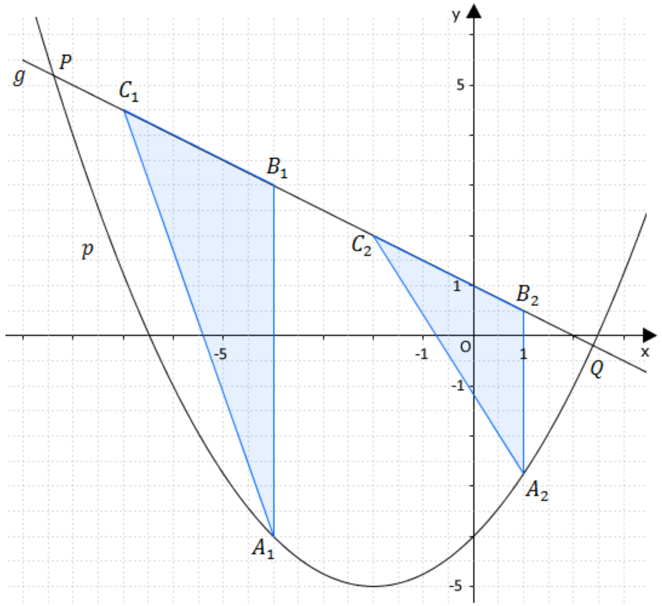
$\Rightarrow \quad$ P$(-8,39|5,20)$; Q$(2,39| - 0,20)$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n\left(x|0,25x^2 + x - 4\right)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x| - 0,5x + 1)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind für $-8,39 < x < 2,39$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g, wobei die Abszisse der Punkte C_n um 3 kleiner ist als die Abszisse x der Punkte A_n und B_n. Zeichnen Sie für $x_1 = -4$ das Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ und für $x_2 = 1$ das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



Aufgabe A2.4 (1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt: $C_n(x-3|-0,5x+2,5)$

Lösung zu Aufgabe A2.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$A_n \left(x|0,25x^2+x-4\right)$

$g: y = -0,5x+1$

C_n liegen auf g und Abszissen sind um 3 kleiner als Abszissen der Punkte A_n.

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

C_n liegt auf der Geraden g $(C_n \in g)$ und für die x- Koordinate gilt: $x_C = x_A - 3$ somit ist $x_C = x - 3$.

$\Rightarrow \quad x_C = x - 3$

Erläuterung: *Einsetzen*

Durch Einsetzen der x- Koordinate $x_C = x - 3$ in die Geradengleichung $g: y = -0,5x+1$ erhält man die y- Koordinate.

$y_C = g(x-3)$

$y_C = -0,5(x-3)+1 = -0,5x+1,5+1 = -0,5x+2,5$

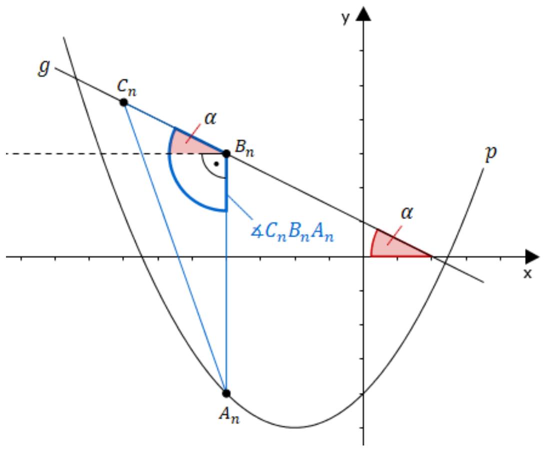
$\Rightarrow \quad C_n \ (x-3|-0,5x+2,5)$

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

In allen Dreiecken $A_n B_n C_n$ haben die Winkel $C_n B_n A_n$ das gleiche Maß. Berechnen Sie das Maß der Winkel $C_n B_n A_n$.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Winkel bestimmen



$g: y = -0,5x + 1$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden entspricht dem Tangens des Winkels α der die Gerade mit der (positiven) x-Achse einschließt.

$\tan\alpha = m$

$\tan\alpha = -0,5$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Wert den der Taschenrechner ausgbit ist negativ.
Für das Weiterrechnen wird der postive Wert verwendet.

$\alpha = \tan^{-1}(-0,5) = 26,57°$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecke $[A_n B_n]$ parallel zur y-Achse verläuft, entspricht der Winkel $\measuredangle C_n B_n A_n$ dem Winkel α zwischen g und der y-Achse plus 90° (siehe Skizze).

$\measuredangle C_n B_n A_n = \alpha + 90° = 26,57° + 90° = 116,57°$