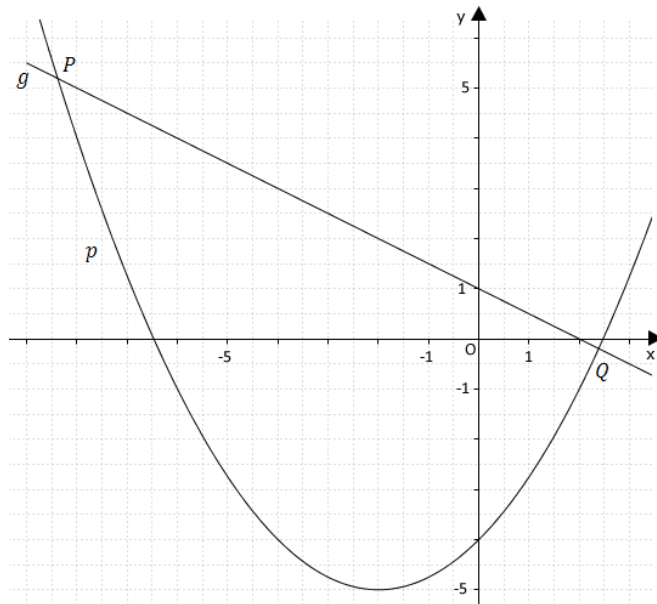


Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die Parabel p mit dem Scheitel $S(-2 | -5)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 + x - 4$ hat.

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Die Gerade g schneidet die Parabel p in den Punkten P und Q . Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q .

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x | 0,25x^2 + x - 4)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x | -0,5x + 1)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind für $-8,39 < x < 2,39$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g , wobei die Abszisse der Punkte C_n um 3 kleiner ist als die Abszisse x der Punkte A_n und B_n . Zeichnen Sie für $x_1 = -4$ das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ und für $x_2 = 1$ das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Aufgabe A2.4 (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass für die Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt: $C_n(x - 3 | -0,5x + 2,5)$

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

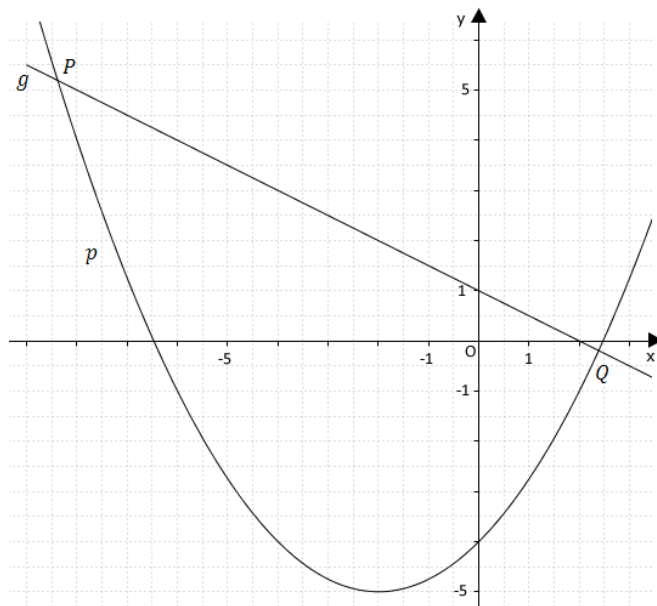
In allen Dreiecken $A_n B_n C_n$ haben die Winkel $\angle C_n B_n A_n$ das gleiche Maß. Berechnen Sie das Maß der Winkel $\angle C_n B_n A_n$.

Lösung

Aufgabe A2.

Die Parabel p mit dem Scheitel $S(-2|-5)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 + x - 4$ hat.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Parameterwerte ermitteln

Gegeben: $S(-2|-5)$; $p: y = 0,25x^2 + bx + c$

Zu beweisen: $p: y = 0,25x^2 + x - 4$

Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*

Eine Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$ kann auch in Scheitelform geschrieben werden: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ mit dem Scheitel $S(x_0|y_0)$

a ist bereits bekannt, b und c sind noch unbekannt.

$$p: y = 0,25x^2 + bx + c = 0,25(x - x_0)^2 + y_0$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Aus dem Graphen werden die Koordinaten des Scheitelpunktes abgelesen.

$$S(-2|-5)$$

Einsetzen des Scheitelpunktes $S(-2|-5)$:

$$p: y = 0,25(x - (-2))^2 + (-5)$$

$$p: y = 0,25(x + 2)^2 - 5$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

$$\text{Erste binomische Formel: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$p: y = 0,25(x^2 + 4x + 4) - 5$$

$$p: y = 0,25x^2 + x + 1 - 5$$

$$p: y = 0,25x^2 + x - 4$$

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Die Gerade g schneidet die Parabel p in den Punkten P und Q .
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q .

Lösung zu Aufgabe A2.2**Schnittpunkt zweier Funktionen**

Gegeben: $g: y = -0,5x + 1$; $p: y = 0,25x^2 + x - 4$

Gesucht: $g \cap p$ (Schnittpunkte von g und p)

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Schema für das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Gleichung nach x auflösen.

$$-0,5x + 1 = 0,25x^2 + x - 4 \quad | +0,5x - 1$$

$$0,25x^2 + 1,5x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = 0,25; b = 1,5; c = -5$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung kannst du, unter anderem, mit der Mitternachtsformel bestimmen.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot (-5)}}{2 \cdot 0,25}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 5}}{0,5}$$

$$x_{1,2} = 2 \left(-1,5 \pm \sqrt{7,25} \right)$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 2 \cdot \sqrt{7,25}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2^2 \cdot 7,25}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{29} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -8,39 \\ x_2 = 2,39 \end{cases}$$

Erläuterung: *Funktionswert*

Die y- Koordinaten der Schnittpunkte werden berechnet, indem $x_1 = -8,39$ und $x_2 = 2,39$ in die Geradengleichung $g: y = -0,5x + 1$ eingesetzt werden.

y-Koordinaten:

$$y_1 = g(x_1) = -0,5 \cdot -8,39 + 1 = 5,20$$

$$y_2 = g(x_2) = -0,5 \cdot 2,39 + 1 = -0,20$$

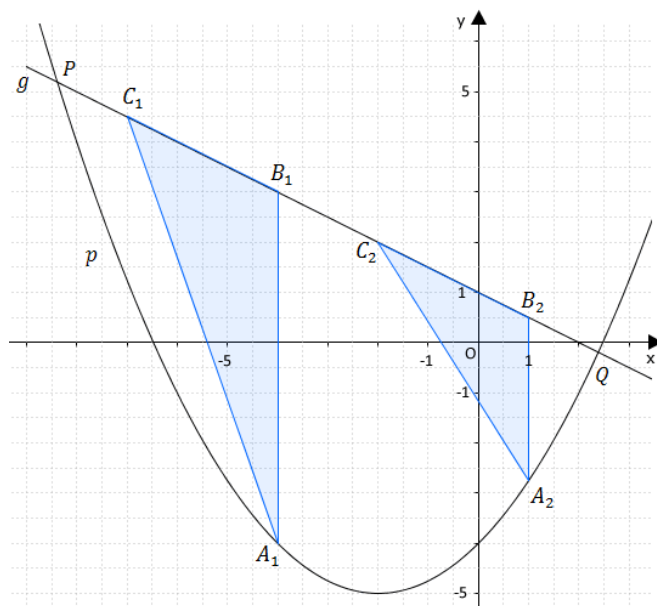
$$\Rightarrow P(-8,39 | 5,20); Q(2,39 | -0,20)$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x | 0,25x^2 + x - 4)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x | -0,5x + 1)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind für $-8,39 < x < 2,39$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g , wobei die Abszisse der Punkte C_n um 3 kleiner ist als die Abszisse x der Punkte A_n und B_n . Zeichnen Sie für $x_1 = -4$ das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ und für $x_2 = 1$ das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze

**Aufgabe A2.4** (1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt: $C_n(x-3 | -0,5x+2,5)$

Lösung zu Aufgabe A2.4**Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben:

$$A_n(x | 0,25x^2 + x - 4)$$

$$g: y = -0,5x + 1$$

C_n liegen auf g und Abszissen sind um 3 kleiner als Abszissen der Punkte A_n .

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

C_n liegt auf der Geraden g ($C_n \in g$) und für die x - Koordinate gilt: $x_C = x_A - 3$ somit ist $x_C = x - 3$.

$$\Rightarrow x_C = x - 3$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Durch Einsetzen der x - Koordinate $x_C = x - 3$ in die Geradengleichung $g: y = -0,5x + 1$ erhält man die y - Koordinate.

$$y_C = g(x - 3)$$

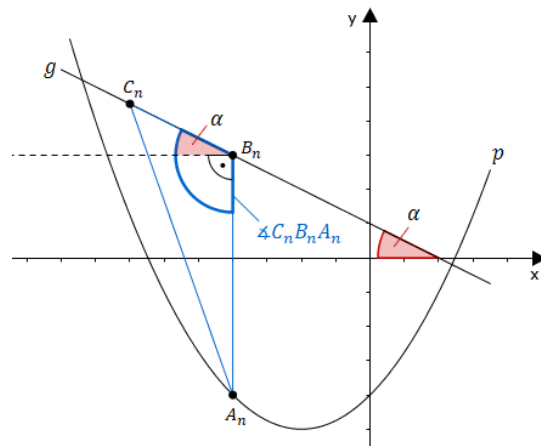
$$y_C = -0,5(x - 3) + 1 = -0,5x + 1,5 + 1 = -0,5x + 2,5$$

$$\Rightarrow C_n(x - 3 | -0,5x + 2,5)$$

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

In allen Dreiecken $A_n B_n C_n$ haben die Winkel $C_n B_n A_n$ das gleiche Maß. Berechnen Sie das Maß der Winkel $C_n B_n A_n$.

Lösung zu Aufgabe A2.5**Winkel bestimmen**



$$g: y = -0,5x + 1$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden entspricht dem Tangens des Winkels α der die Gerade mit der (positiven) x -Achse einschließt.

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = -0,5$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Wert den der Taschenrechner ausgibt ist negativ.
Für das Weiterrechnen wird der positive Wert verwendet.

$$\alpha = \tan^{-1}(-0,5) = 26,57^\circ$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecke $[A_n B_n]$ parallel zur y -Achse verläuft, entspricht der Winkel $\angle C_n B_n A_n$ dem Winkel α zwischen g und der y -Achse plus 90° (siehe Skizze).

$$\angle C_n B_n A_n = \alpha + 90^\circ = 26,57^\circ + 90^\circ = 116,57^\circ$$