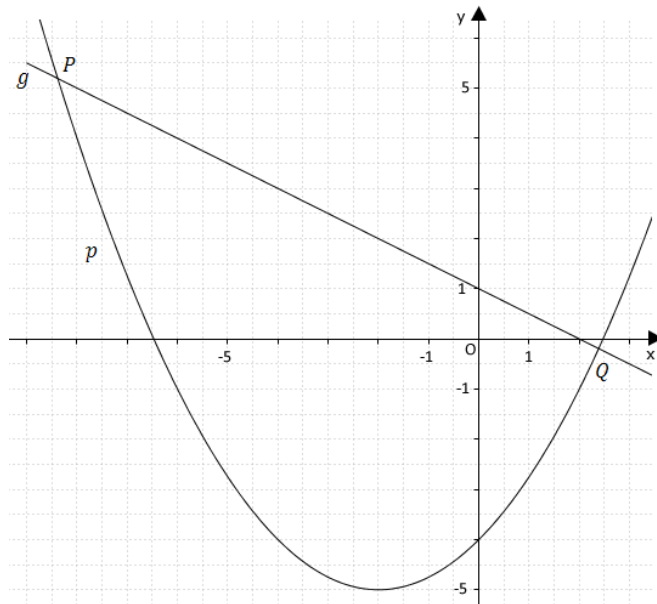


## Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik II Aufgabe A2

### Aufgabe A2.

Die Parabel  $p$  mit dem Scheitel  $S(-2 | -5)$  hat eine Gleichung der Form  $y = 0,25x^2 + bx + c$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $b, c \in \mathbb{R}$ . Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = -0,5x + 1$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



### Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel  $p$  die Gleichung  $y = 0,25x^2 + x - 4$  hat.

### Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Die Gerade  $g$  schneidet die Parabel  $p$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte  $P$  und  $Q$ .

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Punkte  $A_n(x | 0,25x^2 + x - 4)$  auf der Parabel  $p$  und Punkte  $B_n(x | -0,5x + 1)$  auf der Geraden  $g$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind für  $-8,39 < x < 2,39$  zusammen mit Punkten  $C_n$  die Eckpunkte von Dreiecken  $A_n B_n C_n$ . Die Punkte  $C_n$  liegen auf der Geraden  $g$ , wobei die Abszisse der Punkte  $C_n$  um 3 kleiner ist als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $B_n$ . Zeichnen Sie für  $x_1 = -4$  das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  und für  $x_2 = 1$  das Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

### Aufgabe A2.4 (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass für die Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $B_n$  gilt:  $C_n(x - 3 | -0,5x + 2,5)$

### Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

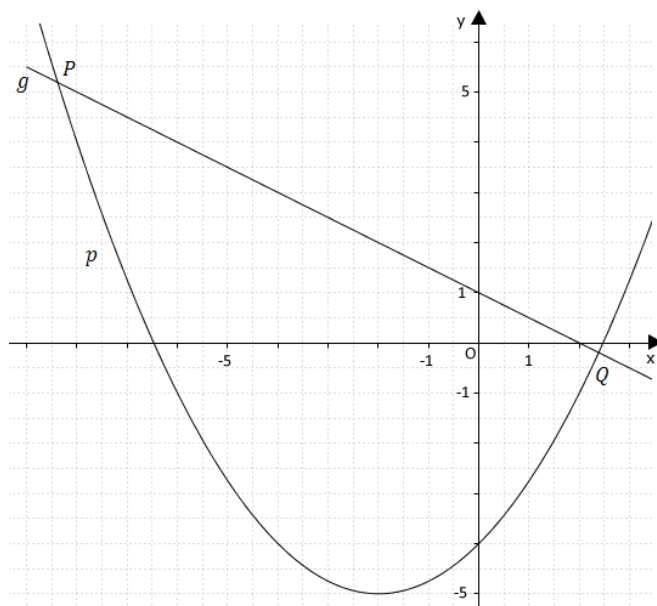
In allen Dreiecken  $A_n B_n C_n$  haben die Winkel  $\angle C_n B_n A_n$  das gleiche Maß. Berechnen Sie das Maß der Winkel  $\angle C_n B_n A_n$ .

## Lösung

## Aufgabe A2.

Die Parabel  $p$  mit dem Scheitel  $S(-2|-5)$  hat eine Gleichung der Form  $y = 0,25x^2 + bx + c$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $b, c \in \mathbb{R}$ . Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = -0,5x + 1$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



## Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel  $p$  die Gleichung  $y = 0,25x^2 + x - 4$  hat.

## Lösung zu Aufgabe A2.1

## Parameterwerte ermitteln

Gegeben:  $S(-2|-5)$ ;  $p: y = 0,25x^2 + bx + c$

Zu beweisen:  $p: y = 0,25x^2 + x - 4$

Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*

Eine Parabel der Form  $y = ax^2 + bx + c$  kann auch in Scheitelform geschrieben werden:  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  mit dem Scheitel  $S(x_0|y_0)$

$a$  ist bereits bekannt,  $b$  und  $c$  sind noch unbekannt.

$$p: y = 0,25x^2 + bx + c = 0,25(x - x_0)^2 + y_0$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Aus dem Graphen werden die Koordinaten des Scheitelpunktes abgelesen.

$$S(-2|-5)$$

Einsetzen des Scheitelpunktes  $S(-2|-5)$ :

$$p: y = 0,25(x - (-2))^2 + (-5)$$

$$p: y = 0,25(x + 2)^2 - 5$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

$$\text{Erste binomische Formel: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$p: y = 0,25(x^2 + 4x + 4) - 5$$

$$p: y = 0,25x^2 + x + 1 - 5$$

$$p: y = 0,25x^2 + x - 4$$

**Aufgabe A2.2** (3 Punkte)

Die Gerade  $g$  schneidet die Parabel  $p$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ .  
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte  $P$  und  $Q$ .

Lösung zu Aufgabe A2.2**Schnittpunkt zweier Funktionen**

Gegeben:  $g: y = -0,5x + 1$ ;  $p: y = 0,25x^2 + x - 4$

Gesucht:  $g \cap p$  (Schnittpunkte von  $g$  und  $p$ )

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Schema für das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Gleichung nach  $x$  auflösen.

$$-0,5x + 1 = 0,25x^2 + x - 4 \quad | +0,5x - 1$$

$$0,25x^2 + 1,5x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = 0,25; b = 1,5; c = -5$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung kannst du, unter anderem, mit der Mitternachtsformel bestimmen.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot (-5)}}{2 \cdot 0,25}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 5}}{0,5}$$

$$x_{1,2} = 2 \left( -1,5 \pm \sqrt{7,25} \right)$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 2 \cdot \sqrt{7,25}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2^2 \cdot 7,25}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{29} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -8,39 \\ x_2 = 2,39 \end{cases}$$

Erläuterung: *Funktionswert*

Die y- Koordinaten der Schnittpunkte werden berechnet, indem  $x_1 = -8,39$  und  $x_2 = 2,39$  in die Geradengleichung  $g: y = -0,5x + 1$  eingesetzt werden.

y-Koordinaten:

$$y_1 = g(x_1) = -0,5 \cdot -8,39 + 1 = 5,20$$

$$y_2 = g(x_2) = -0,5 \cdot 2,39 + 1 = -0,20$$

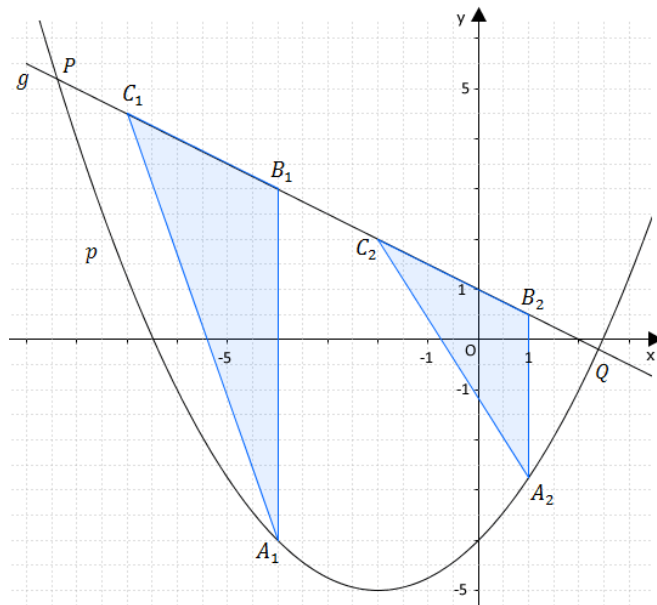
$$\Rightarrow P(-8,39 | 5,20); Q(2,39 | -0,20)$$

**Aufgabe A2.3** (2 Punkte)

Punkte  $A_n(x | 0,25x^2 + x - 4)$  auf der Parabel  $p$  und Punkte  $B_n(x | -0,5x + 1)$  auf der Geraden  $g$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind für  $-8,39 < x < 2,39$  zusammen mit Punkten  $C_n$  die Eckpunkte von Dreiecken  $A_n B_n C_n$ . Die Punkte  $C_n$  liegen auf der Geraden  $g$ , wobei die Abszisse der Punkte  $C_n$  um 3 kleiner ist als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $B_n$ . Zeichnen Sie für  $x_1 = -4$  das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  und für  $x_2 = 1$  das Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

**Skizze**

**Aufgabe A2.4** (1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $B_n$  gilt:  $C_n(x-3 | -0,5x+2,5)$

Lösung zu Aufgabe A2.4**Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben:

$$A_n(x | 0,25x^2 + x - 4)$$

$$g: y = -0,5x + 1$$

$C_n$  liegen auf  $g$  und Abszissen sind um 3 kleiner als Abszissen der Punkte  $A_n$ .

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

$C_n$  liegt auf der Geraden  $g$  ( $C_n \in g$ ) und für die  $x$ - Koordinate gilt:  $x_C = x_A - 3$  somit ist  $x_C = x - 3$ .

$$\Rightarrow x_C = x - 3$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Durch Einsetzen der  $x$ - Koordinate  $x_C = x - 3$  in die Geradengleichung  $g: y = -0,5x + 1$  erhält man die  $y$ - Koordinate.

$$y_C = g(x - 3)$$

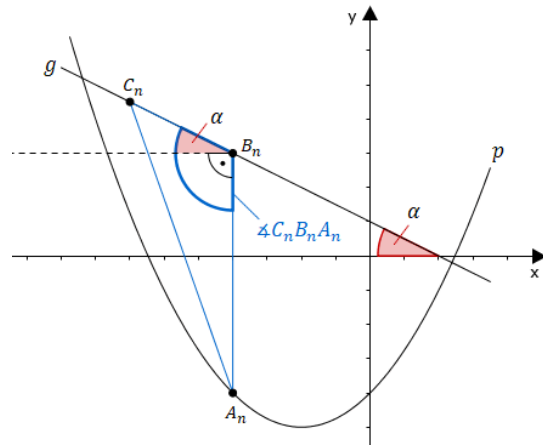
$$y_C = -0,5(x - 3) + 1 = -0,5x + 1,5 + 1 = -0,5x + 2,5$$

$$\Rightarrow C_n(x - 3 | -0,5x + 2,5)$$

**Aufgabe A2.5** (2 Punkte)

In allen Dreiecken  $A_n B_n C_n$  haben die Winkel  $C_n B_n A_n$  das gleiche Maß. Berechnen Sie das Maß der Winkel  $C_n B_n A_n$ .

Lösung zu Aufgabe A2.5**Winkel bestimmen**



$$g: y = -0,5x + 1$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung  $m$  einer Geraden entspricht dem Tangens des Winkels  $\alpha$  der die Gerade mit der (positiven)  $x$ -Achse einschließt.

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = -0,5$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Wert den der Taschenrechner ausgibt ist negativ. Für das Weiterrechnen wird der positive Wert verwendet.

$$\alpha = \tan^{-1}(-0,5) = 26,57^\circ$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecke  $[A_n B_n]$  parallel zur  $y$ -Achse verläuft, entspricht der Winkel  $\angle C_n B_n A_n$  dem Winkel  $\alpha$  zwischen  $g$  und der  $y$ -Achse plus  $90^\circ$  (siehe Skizze).

$$\angle C_n B_n A_n = \alpha + 90^\circ = 26,57^\circ + 90^\circ = 116,57^\circ$$