

Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik I Aufgabe A2

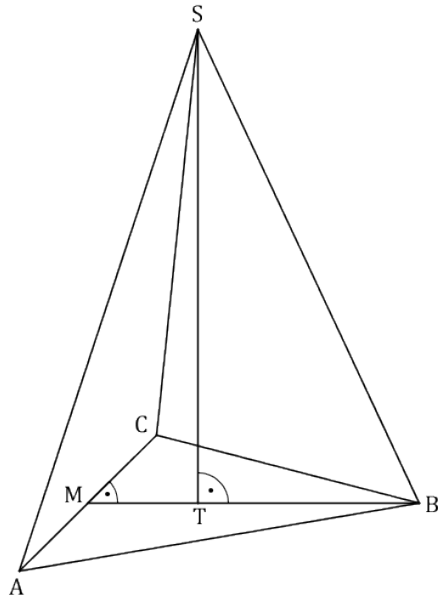
Aufgabe A2.

Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck ABC ist. Der Fußpunkt T der Pyramidenhöhe $[ST]$ teilt die Dreieckshöhe $[MB]$ des gleichseitigen Dreiecks ABC im Verhältnis $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$. Es gilt: $\overline{MB} = 6$ cm; $\angle SBM = 65^\circ$.

In der Zeichnung gilt:

$q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$; $[MB]$ liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[ST]$.
[Ergebnis: $\overline{ST} = 8,58$ cm]

Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[BS]$. Die Winkel $\angle BMP_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [0^\circ; 76,88^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten A und C die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken AP_nC mit der Basis $[AC]$.

Zeichnen Sie das Dreieck AP_1C für $\varphi = 20^\circ$ in das Schrägbild zu 2.0 ein.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44}{\sin(\varphi + 65^\circ)}$ cm.

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken AP_nC hat das Dreieck AP_2C den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AP_2C .

Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind für $\varphi \in]0^\circ; 76,88^\circ]$ Spitzen von Pyramiden $ABCP_n$ mit den Höhen $[P_nF_n]$, deren Fußpunkte F_n auf $[MB]$ liegen. Für das Volumen der Pyramide $ABCP_3$ gilt: $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$. Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Erläuterung: *Erläuterung*

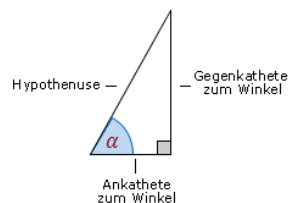
Da $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$ besteht die Strecke $[MB]$ aus 3 Teilen.

Um die Länge \overline{TB} zu berechnen, werden zwei der drei Teile benötigt.

$$\overline{TB} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB} = 4 \text{ cm}$$

Bestimmen der Länge von $[ST]$:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{TB}} = \tan (65^\circ)$$

$$\overline{ST} = \overline{TB} \cdot \tan (65^\circ) = \underline{8,58 \text{ cm}}$$

Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[BS]$. Die Winkel $\angle BMP_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [0^\circ; 76,88^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten A und C die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken AP_nC mit der Basis $[AC]$.

Zeichnen Sie das Dreieck AP_1C für $\varphi = 20^\circ$ in das Schrägbild zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Skizze

Gegeben:

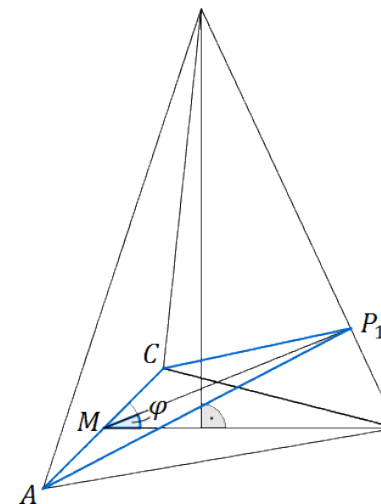
Zeichnung der Pyramide $ABCS$ mit $q = \frac{1}{2}$, $w = 45^\circ$ und Strecke $[MB]$ auf der Schrägbildachse.

Gefordert:

Einzeichnen des Dreiecks AP_1C mit Winkel $\angle BMP_1 = 20^\circ$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Punkt P_1 ist der Schnittpunkt der Geraden $[MP_1]$ und $[BS]$. $[MP_1]$ schließt mit der Geraden $[MB]$ einen Winkel von 20° ein. Nachdem $[MB]$ auf der Schrägbildachse liegt kann der Winkel einfach mit dem Geodreieck abgemessen und $[MP_1]$ eingezeichnet werden.



Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

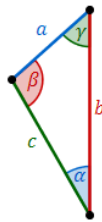
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44}{\sin(\varphi + 65^\circ)}$ cm.

Lösung zu Aufgabe A2.3**2-dimensionale Geometrie**

Gegeben: $\overline{MB} = 6$ cm

Zu beweisen: $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44}{\sin(\varphi + 65^\circ)}$ cm

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck MP_nB gilt somit: $\frac{\overline{MB}}{\sin \angle MP_nB} = \frac{\overline{P_nB}}{\sin \angle B P_n M} = \frac{\overline{MP_n}}{\sin \angle P_n B M}$

Für den Winkel $\angle MP_nB$ gilt: $\angle MP_nB + \angle B P_n M + \angle P_n B M = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle MP_nB = 180^\circ - (\angle B P_n M + \angle P_n B M)$$

$$\Rightarrow \angle MP_nB = 180^\circ - (65^\circ + \varphi)$$

Aufgrund des Sinus-Satzes gilt:

$$\frac{\overline{MP_n}}{\sin(65^\circ)} = \frac{\overline{MB}}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]} \cdot \sin(65^\circ)$$

$$\overline{MP_n} = \frac{\overline{MB} \cdot \sin(65^\circ)}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]}$$

$$\overline{MP_n} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 0,91}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]}$$

$$\overline{MP_n} = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]}$$

Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{Hier: } \sin[180^\circ - \underbrace{(65^\circ + \varphi)}_{\alpha}] = \sin(65^\circ + \varphi)$$

$$\overline{MP_n} = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

In dem Term für $\overline{MP_n}$ kommt die Variable φ vor. Somit kann $\overline{MP_n}$ auch als Funktion von φ aufgefasst werden: $\overline{MP_n} = \overline{MP_n}(\varphi)$

Somit gilt für die Länge der Strecke $[MP_n]$ in Abhängigkeit von dem Winkel φ :

$$\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken AP_nC hat das Dreieck AP_2C den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AP_2C .

Lösung zu Aufgabe A2.4**Länge einer Strecke**

Gegeben: $\overline{MB} = 6 \text{ cm}; \overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$

Gesucht: A_{AP_2C} , sodass A_{AP_2C} minimal ist für alle A_{AP_nC}

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet man mit folgender Formel:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Länge der Kante $[AC]$ bestimmen:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AC} = \overline{MB} \quad | \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{MB}$$

$$\overline{AC} = 6,93 \text{ cm}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt A_{AP_nC} bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MP_n}$$

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{MB}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

Extremwertproblem

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{MB}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{MP_n}$$

Erläuterung: *Umformung, Sinussatz*

Laut dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\overline{MP_n}}{\sin 65^\circ} = \frac{\overline{MB}}{\sin(65^\circ + \varphi)} \quad | \cdot \sin 65^\circ$$

$$\overline{MP_n} = \frac{\overline{MB} \cdot \sin 65^\circ}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{MB}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{MB} \sin(65^\circ)}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

$$A_{AP_nC} = \overline{MB}^2 \cdot \frac{\sin(65^\circ)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Minimum der Funktion, Sinusfunktion*

Der Flächeninhalt ist ein Produkt. Dieses wird minimal, wenn die variablen Faktoren minimal werden.

Hier muss also der Quotient $\frac{1}{\sin(65^\circ + \varphi)}$ den kleinstmöglichen Wert annehmen. Dies ist der Fall, wenn der Sinus im Nenner maximal wird. Der größte Wert den der Sinus annehmen kann ist 1. Dies ist der Fall für $+90^\circ$.

$$\frac{1}{\sin(90^\circ)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow A_{AP_2C} = \overline{MB}^2 \cdot \frac{\sin(65^\circ)}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \overline{MB}^2 \cdot \frac{\sin(65^\circ)}{\sqrt{3}}$$

$$A_{AP_2C} = 36 \text{ cm}^2 \cdot \frac{0,91}{1,73} = 36 \text{ cm}^2 \cdot 0,52$$

$$A_{AP_2C} = \underline{18,84 \text{ cm}^2}$$

Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind für $\varphi \in]0^\circ; 76,88^\circ]$ Spitzen von Pyramiden $ABCP_n$ mit den Höhen $[P_nF_n]$, deren Fußpunkte F_n auf $[MB]$ liegen. Für das Volumen der Pyramide

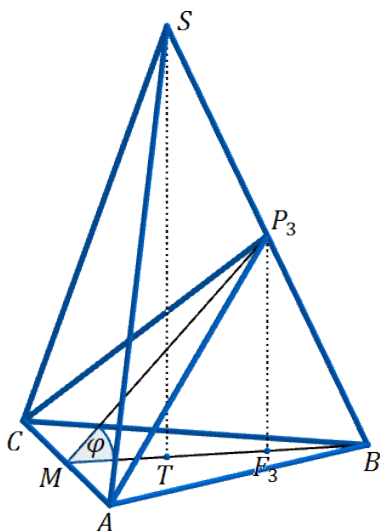
$ABC P_3$ gilt: $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$. Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Lösung zu Aufgabe A2.5

Volumen einer Pyramide

Gegeben: $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$; $\overline{ST} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB} \cdot \tan(65^\circ)$

Gesucht: $\varphi = \angle P_3 M B$



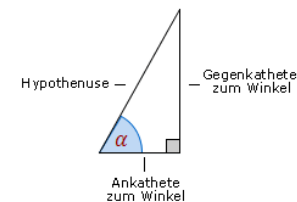
Erläuterung: *Erläuterung*

Aufgrund der identischen Grundfläche verhalten sich die Volumina der Pyramiden $ABCS$ und $ABCP_3$ zueinander wie die jeweiligen Höhen \overline{ST} und $\overline{P_3 F_3}$.

$$\overline{P_3 F_3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ST} = \frac{\overline{MB}}{3} \cdot \tan(65^\circ)$$

$$\overline{P_3 F_3} = 4,29 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Winkel bestimmen

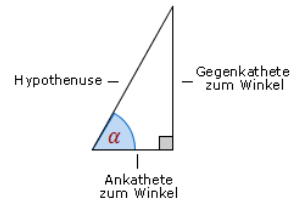
$$\frac{\overline{P_3 F_3}}{\overline{F_3 B}} = \tan(65^\circ) \quad | \cdot \frac{\overline{F_3 B}}{\tan(65^\circ)}$$

$$\overline{F_3 B} = \frac{\overline{P_3 F_3}}{\tan(65^\circ)} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MB} = 2 \text{ cm}$$

$$\overline{MB} = \overline{M F_3} + \overline{F_3 B}$$

$$\overline{M F_3} = \overline{MB} - \overline{F_3 B} = \overline{MB} - \frac{\overline{MB}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB} = 4 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\frac{\overline{P_3 F_3}}{\overline{M F_3}} = \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{P_3 F_3}}{\overline{M F_3}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} (65^\circ) \right) = 47^\circ$$