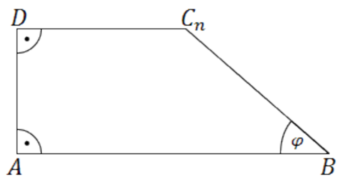
Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Die Trapeze $A\,B\,C_n\,D$ (siehe Skizze) haben die parallelen Seiten $[A\,B]$ und $[C_n\,D]$. Die Winkel $C_n\,B\,A$ haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]21,80°;90°[$.
Es gilt: $\overline{A\,B} = 10$ cm; $\overline{A\,D} = 4$ cm; $\measuredangle B\,A\,D = 90°$.



Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Bestätigen Sie durch Rechnung die untere Intervallgrenze von φ .

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A\,B\,C_n\,D$ in Abhängigkeit von φ gilt: $A(\varphi) = \left(40 - \frac{8}{\tan\varphi}\right)$ cm^2.

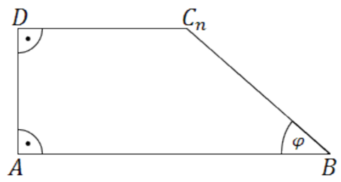
Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Für $\varphi = 50°$ entsteht das Trapez $A\,B\,C_1\,D$. Der Flächeninhalt des Trapezes $A\,B\,C_2\,D$ ist um 30% kleiner als der Flächeninhalt des Trapezes $A\,B\,C_1\,D$. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $C_2\,B\,A$ des Trapezes $A\,B\,C_2\,D$.

Lösung

Aufgabe A3.

Die Trapeze $A\,B\,C_n\,D$ (siehe Skizze) haben die parallelen Seiten $[A\,B]$ und $[C_n\,D]$. Die Winkel $C_n\,B\,A$ haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]21,80°;90°[$.
Es gilt: $\overline{A\,B} = 10$ cm; $\overline{A\,D} = 4$ cm; $\measuredangle B\,A\,D = 90°$.



Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung die untere Intervallgrenze von φ .

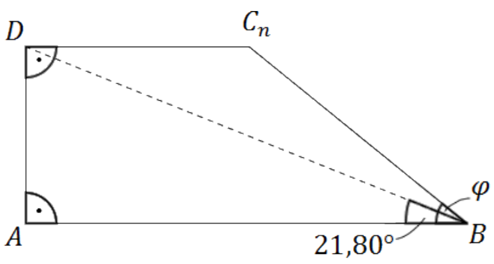
Lösung zu Aufgabe A3.1

Abstand zweier Punkte

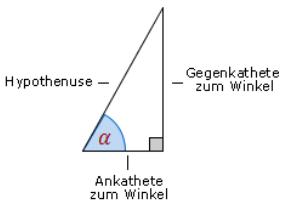
Gegeben: $\overline{A\,B} = 10$ cm; $\overline{A\,D} = 4$ cm; $\measuredangle B\,A\,D = 90°$

Zu beweisen: Untere Intervallgrenze $\varphi = 21,80°$

Das Trapez $A\,B\,C_n\,D$ wird zu einem Dreieck, wenn C_n zu D wird.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}\right) = \tan^{-1}(0,4)$$

$$\varphi = 21,80^\circ$$

$\Rightarrow$ Für $\varphi > 21,80^\circ$ existieren die Trapeze ABC_nD.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze ABC_nD in Abhängigkeit von φ

gilt: $A(\varphi) = \left(40 - \frac{8}{\tan\varphi}\right)$ cm^2.

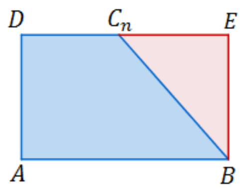
Lösung zu Aufgabe A3.2

Flächeninhalt eines Trapezes

Gegeben: $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{AD} = 4$ cm; $\measuredangle BAD = 90^\circ$; $A_{ABC_nD} = A$

Zu beweisen: $A(\varphi) = \left(40 - \frac{8}{\tan(\varphi)}\right)$ cm^2

Erläuterung: *Erläuterung, Fläche eines Trapezes*



Der Flächeninhalt des Trapezes ABC_nD wird hier dargestellt als Differenz der Flächeninhalte des Rechtecks $ABED$ minus dem Dreieck BEC_n.

$$A = A_{ABED} - A_{BEC_n}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks*

Da jedes Rechteck in zwei identische rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks genau die Hälfte des Flächeninhalts des korrespondierenden Rechtecks:

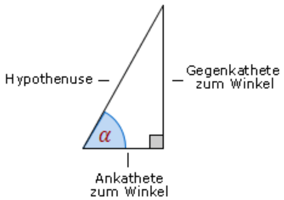
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

mit a, b als Seitenlängen des Rechtecks.

In diesem Fall ist $a = \overline{BE} = \overline{AD}$ und $b = \overline{EC_n}$

$$A = (\overline{AB} \cdot \overline{AD}) - \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{EC_n}\right)$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Die Länge der Strecke $[E\,C_n]$ kann also auch dargestellt werden als $\overline{E\,C_n} = \dfrac{\overline{A\,D}}{\tan(\varphi)}$.

$$A = \left(\overline{A\,B} \cdot \overline{A\,D}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{A\,D}^2 \cdot \frac{1}{\tan(\varphi)}\right)$$

$$A = 40 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 16 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{\tan(\varphi)} = 40 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{\tan(\varphi)}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die gefundene Formel für A enthält noch die Variable φ. Damit kann A auch als Funktion von φ betrachtet werden.

$$A(\varphi) = \left(40 - \frac{8}{\tan(\varphi)}\right) \text{ cm}^2$$

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Für $\varphi = 50^\circ$ entsteht das Trapez $A\,B\,C_1\,D$. Der Flächeninhalt des Trapezes $A\,B\,C_2\,D$ ist um 30% kleiner als der Flächeninhalt des Trapezes $A\,B\,C_1\,D$. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $C_2\,B\,A$ des Trapezes $A\,B\,C_2\,D$.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Winkel bestimmen

Gegeben: $A_{A\,B\,C_n\,D} = \left(40 - \dfrac{8}{\tan(\varphi)}\right) \text{cm}^2; \varphi_1 = 50^\circ$

Gesucht: φ_2, sodass $A_{A\,B\,C_2\,D} = 0,7 \cdot A_{A\,B\,C_1\,D}$

Erläuterung: *Gleichsetzen, Erläuterung*

Um φ_2 zu bestimmen, beginnen wir mit dem Gleichsetzen der Funktionsterme für den Flächeninhalt und lösen nach φ_2 auf.

$$40 - \frac{8}{\tan\,(\varphi_2)} = 0,7 \cdot \left(40 - \frac{8}{\tan\,(\varphi_1)}\right) \quad | - 40$$

$$-\frac{8}{\tan\,(\varphi_2)} = 28 - \frac{5,6}{\tan\,(\varphi_1)} - 40$$

$$-\frac{8}{\tan\,(\varphi_2)} = -12 - \frac{5,6}{\tan\,(\varphi_1)} \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{8}{\tan\,(\varphi_2)} = 12 + \frac{5,6}{\tan\,(\varphi_1)} \quad | \cdot \tan\,(\varphi_2)$$

$$8 = \tan\,(\varphi_2)\,\left[12 + \frac{5,6}{\tan\,(\varphi_1)}\right] \quad | : \left[12 + \frac{5,6}{\tan\,(\varphi_1)}\right]$$

$$\tan\,(\varphi_2) = \frac{8}{12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)}} \quad |\tan^{-1}$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left[\frac{8}{12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{8}{12 + \frac{5,6}{\tan(50^\circ)}}\right] = \tan^{-1}\,(0,4791)$$

$$\varphi_2 = 25,60^\circ$$