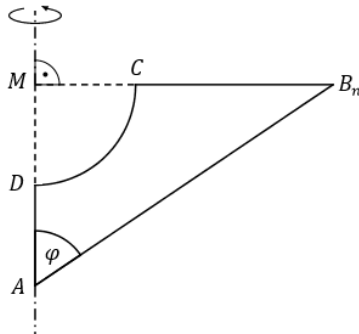


## Mittlere-Reife-Prüfung 2015 Mathematik I Aufgabe A1

### Aufgabe A1.

Gegeben sind rechtwinklige Dreiecke  $AB_nM$  mit  $\overline{AM} = 4$  cm und den Hypotenusen  $[AB_n]$ . Die Winkel  $B_nAM$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]30^\circ; 90^\circ[$ . Der Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r = \overline{MC} = 2$  cm schneidet die Seite  $[AM]$  im Punkt  $D$  und die Seiten  $[B_nM]$  im Punkt  $C$ . Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



#### Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie die Länge der Seite  $[AB_1]$  für  $\varphi = 54^\circ$ .

#### Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Die Figuren  $AB_nCD$ , die durch die Strecken  $[AD]$ ,  $[AB_n]$  und  $[B_nC]$  sowie durch den Kreisbogen  $\widehat{DC}$  begrenzt sind, rotieren um die Gerade  $AM$ . Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen  $V$  der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $V(\varphi) = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1) \text{ cm}^3$ .

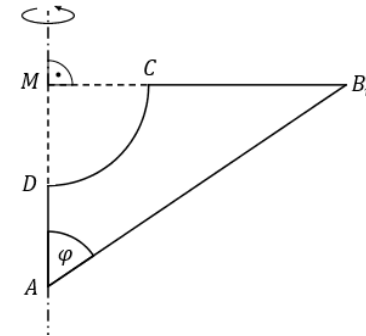
#### Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers für  $\varphi = 54^\circ$ .

## Lösung

### Aufgabe A1.

Gegeben sind rechtwinklige Dreiecke  $AB_nM$  mit  $\overline{AM} = 4$  cm und den Hypotenusen  $[AB_n]$ . Die Winkel  $B_nAM$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]30^\circ; 90^\circ[$ . Der Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r = \overline{MC} = 2$  cm schneidet die Seite  $[AM]$  im Punkt  $D$  und die Seiten  $[B_nM]$  im Punkt  $C$ . Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



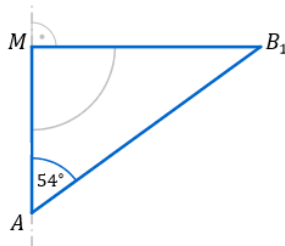
#### Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seite  $[AB_1]$  für  $\varphi = 54^\circ$ .

#### Lösung zu Aufgabe A1.1

##### *Seite eines Dreiecks bestimmen*

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck  $AM B_1$ :



$$\cos \varphi = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB_n}} \Rightarrow \overline{AB_n} = \frac{\overline{AM}}{\cos \varphi}$$

$$\overline{AB_1} = \frac{4}{\cos 54^\circ} \approx 6,81$$

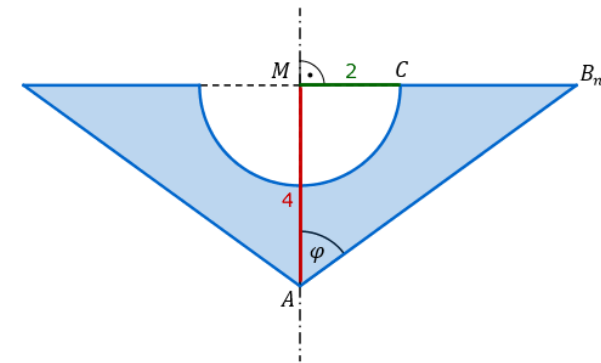
#### Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Die Figuren  $AB_nCD$ , die durch die Strecken  $[AD]$ ,  $[AB_n]$  und  $[B_nC]$  sowie durch den Kreisbogen  $\widehat{DC}$  begrenzt sind, rotieren um die Gerade  $AM$ .

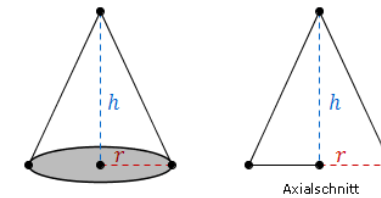
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen  $V$  der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $V(\varphi) = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1) \text{ cm}^3$ .

#### Lösung zu Aufgabe A1.2

##### Volumen des Rotationskörpers ermitteln



Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius  $r$  und Höhe  $h$ , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

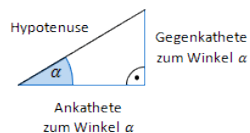
$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Radius des Kegels entspricht der Länge der Strecke  $[MB_n]$ .

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MB_n}^2 \cdot \pi \cdot 4$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

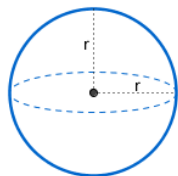
$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Zwischenrechnung:  $\tan \varphi = \frac{\overline{MB_n}}{4} \Rightarrow \overline{MB_n} = 4 \tan \varphi$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot (4 \tan \varphi)^2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{64}{3} \cdot \pi \cdot \tan^2 \varphi$$

Erläuterung: *Volumen einer Kugel*



Eine Kugel mit Radius  $r$  hat ein Volumen von:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = V_{\text{Kegel}} - V_{\text{Halbkugel}}$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{64}{3} \cdot \pi \cdot \tan^2 \varphi - \frac{16}{3} \cdot \pi = \frac{16}{3} \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1)$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{16}{3} \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1) \text{ cm}^3$$

### Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers für  $\varphi = 54^\circ$ .

### Lösung zu Aufgabe A1.3

#### *Volumen des Rotationskörpers ermitteln*

$\varphi = 54^\circ$  in das Ergebnis von Teilaufgabe A1.2 einsetzen:

$$V = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot (4 \tan^2 54^\circ - 1) \approx 6,81 \text{ cm}^3$$