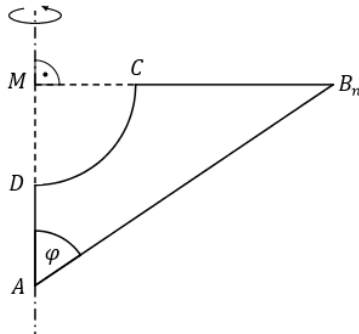


Mittlere-Reife-Prüfung 2015 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Gegeben sind rechtwinklige Dreiecke AB_nM mit $\overline{AM} = 4$ cm und den Hypotenusen $[AB_n]$. Die Winkel B_nAM haben das Maß φ mit $\varphi \in]30^\circ; 90^\circ[$. Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{MC} = 2$ cm schneidet die Seite $[AM]$ im Punkt D und die Seiten $[B_nM]$ im Punkt C . Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie die Länge der Seite $[AB_1]$ für $\varphi = 54^\circ$.

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Die Figuren AB_nCD , die durch die Strecken $[AD]$, $[AB_n]$ und $[B_nC]$ sowie durch den Kreisbogen \widehat{DC} begrenzt sind, rotieren um die Gerade AM . Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1) \text{ cm}^3$.

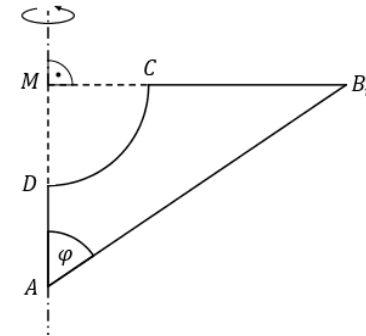
Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers für $\varphi = 54^\circ$.

Lösung

Aufgabe A1.

Gegeben sind rechtwinklige Dreiecke AB_nM mit $\overline{AM} = 4$ cm und den Hypotenusen $[AB_n]$. Die Winkel B_nAM haben das Maß φ mit $\varphi \in]30^\circ; 90^\circ[$. Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{MC} = 2$ cm schneidet die Seite $[AM]$ im Punkt D und die Seiten $[B_nM]$ im Punkt C . Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



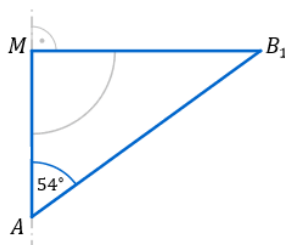
Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seite $[AB_1]$ für $\varphi = 54^\circ$.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Seite eines Dreiecks bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $AM B_1$:



$$\cos \varphi = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB_n}} \Rightarrow \overline{AB_n} = \frac{\overline{AM}}{\cos \varphi}$$

$$\overline{AB_1} = \frac{4}{\cos 54^\circ} \approx 6,81$$

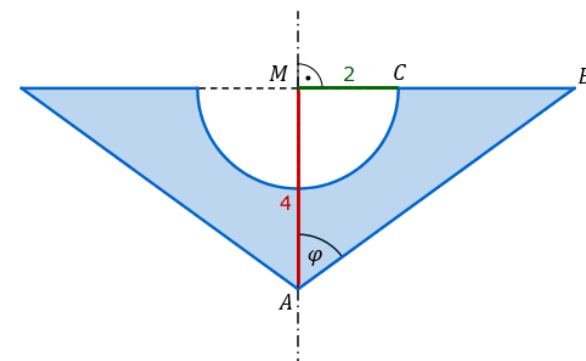
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Die Figuren AB_nCD , die durch die Strecken $[AD]$, $[AB_n]$ und $[B_nC]$ sowie durch den Kreisbogen \widehat{DC} begrenzt sind, rotieren um die Gerade AM .

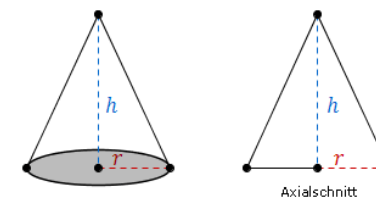
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1) \text{ cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

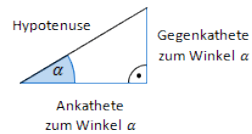
$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Radius des Kegels entspricht der Länge der Strecke $[MB_n]$.

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MB_n}^2 \cdot \pi \cdot 4$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

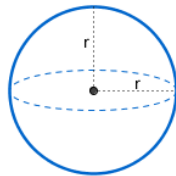
$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Zwischenrechnung: $\tan \varphi = \frac{\overline{MB_n}}{4} \Rightarrow \overline{MB_n} = 4 \tan \varphi$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot (4 \tan \varphi)^2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{64}{3} \cdot \pi \cdot \tan^2 \varphi$$

Erläuterung: *Volumen einer Kugel*



Eine Kugel mit Radius r hat ein Volumen von:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = V_{\text{Kegel}} - V_{\text{Halbkugel}}$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{64}{3} \cdot \pi \cdot \tan^2 \varphi - \frac{16}{3} \cdot \pi = \frac{16}{3} \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1)$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{16}{3} \pi \cdot (4 \tan^2 \varphi - 1) \text{ cm}^3$$

Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers für $\varphi = 54^\circ$.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

$\varphi = 54^\circ$ in das Ergebnis von Teilaufgabe A1.2 einsetzen:

$$V = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot (4 \tan^2 54^\circ - 1) \approx 6,81 \text{ cm}^3$$