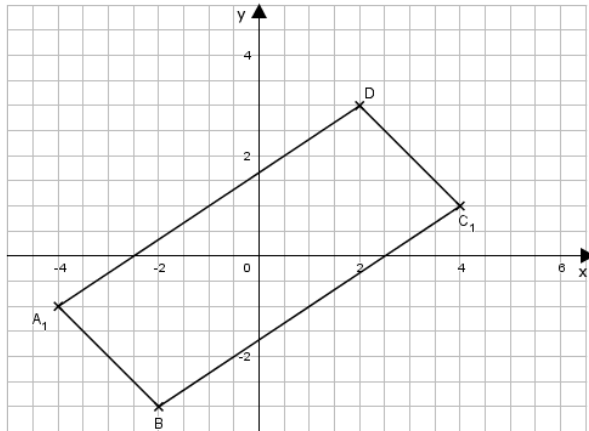


Mittlere-Reife-Prüfung 2015 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Punkte A_n ($2 \cdot \sin \varphi - 4|3 \cdot \sin \varphi - 1|$) mit $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$ legen zusammen mit den Punkten $B(-2|-3)$ und $D(2|3)$ Parallelogramme $A_n B C_n D$ fest.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

In das Koordinatensystem zu A 2. ist das Parallelogramm $A_1 B C_1 D$ für $\varphi = 0^\circ$ eingezeichnet.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_2 für $\varphi = 90^\circ$ und zeichnen Sie sodann das Parallelogramm $A_2 B C_2 D$ ein.

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Trägergraphen t der Punkte A_n gilt: $y = \frac{3}{2}x + 5$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Zeichnen Sie den Trägergraphen t in das Koordinatensystem zu A 2. ein.

Aufgabe A2.3 (4 Punkte)

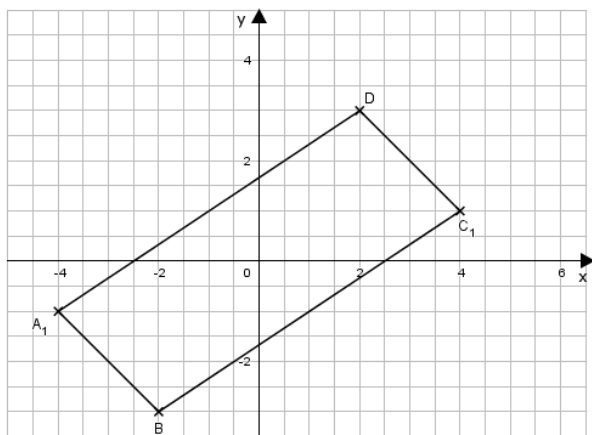
Begründen Sie, dass die Flächeninhalte A aller Parallelogramme $A_n B C_n D$ maßgleich sind.



Lösung

Aufgabe A2.

Punkte $A_n (2 \cdot \sin \varphi - 4 | 3 \cdot \sin \varphi - 1)$ mit $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$ legen zusammen mit den Punkten $B(-2 | -3)$ und $D(2 | 3)$ Parallelogramme $A_n B C_n D$ fest.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

In das Koordinatensystem zu A 2. ist das Parallelogramm $A_1 B C_1 D$ für $\varphi = 0^\circ$ eingezeichnet.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_2 für $\varphi = 90^\circ$ und zeichnen Sie sodann das Parallelogramm $A_2 B C_2 D$ ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Koordinaten von Punkten ermitteln

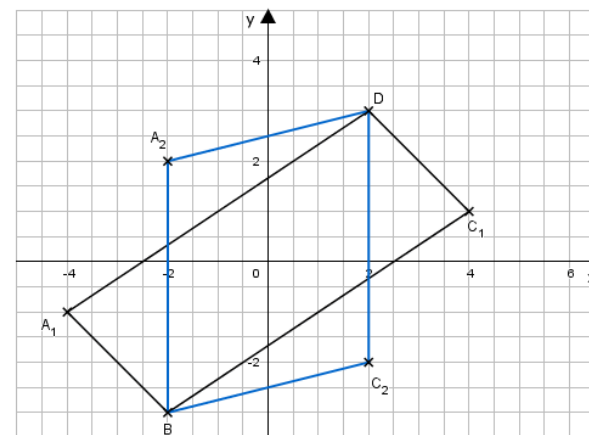
$$A_n (2 \cdot \sin \varphi - 4 | 3 \cdot \sin \varphi - 1)$$

$$A_2 (2 \cdot \sin 90^\circ - 4 | 3 \cdot \sin 90^\circ - 1)$$

$$A_2 (2 \cdot 1 | 3 \cdot 1 - 1)$$

$$A_2 (-2 | 2)$$

Skizze



Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Trägergraphen t der Punkte A_n gilt: $y = \frac{3}{2}x + 5$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Zeichnen Sie den Trägergraphen t in das Koordinatensystem zu A 2. ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$A_n (2 \cdot \sin \varphi - 4 | 3 \cdot \sin \varphi - 1)$$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Trägergraphen werden bestimmt indem die Koordinaten der Punkte A_n unabhängig vom Winkel φ dargestellt werden.

Hierzu wird die x - Koordindate Punktes A_n nach $\sin \varphi$ aufgelöst und anschließend in der y - Koordinate φ durch den berechneten Term ersetzt.

$$x = 2 \cdot \sin \varphi - 4 \quad | + 4$$

$$x + 4 = 2 \cdot \sin \varphi \quad | : 2$$

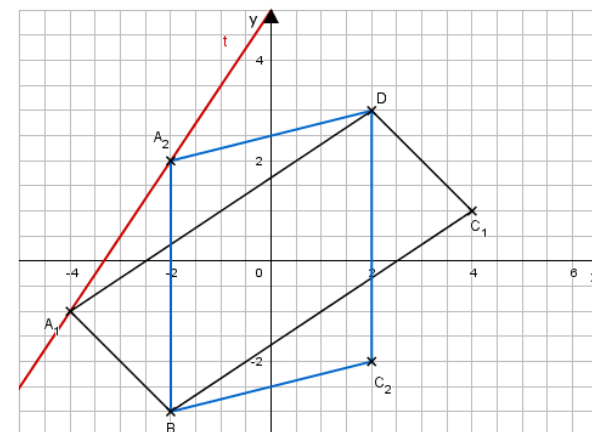
$$\sin \varphi = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y = 3 \cdot \sin \varphi - 1$$

$$y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) - 1 = \frac{3}{2}x + 6 - 1$$

$$t : y = \frac{3}{2}x + 5$$

Skizze



Aufgabe A2.3 (4 Punkte)

Begründen Sie, dass die Flächeninhalte A aller Parallelogramme $A_n B C_n D$ maßgleich sind.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Flächeninhalt eines Vierecks

$$A_n (2 \cdot \sin \varphi - 4 | 3 \cdot \sin \varphi - 1) ; B(-2 | -3) ; D(2 | 3)$$

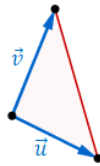
$$\overrightarrow{BD} = \vec{D} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA_n} = \vec{A_n} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin \varphi - 4 \\ 3 \cdot \sin \varphi - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin \varphi - 2 \\ 3 \cdot \sin \varphi + 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$



Da in der Aufgabe der Flächeninhalt eines Vierecks gefragt ist muss der Flächeninhalt des Dreiecks doppelt genommen werden.

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \cdot \sin \varphi - 2 \\ 6 & 3 \cdot \sin \varphi + 2 \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A = 4 \cdot (3 \cdot \sin \varphi + 2) - 6 \cdot (2 \cdot \sin \varphi - 2)$$

$$A = 12 \cdot \sin \varphi + 8 - 12 \cdot \sin \varphi + 12$$

$$A = 20 \text{ FE}$$

Alle Parallelogramme $A_n B C_n D$ haben unabhängig von φ den gleichen Flächeninhalt (20 FE).