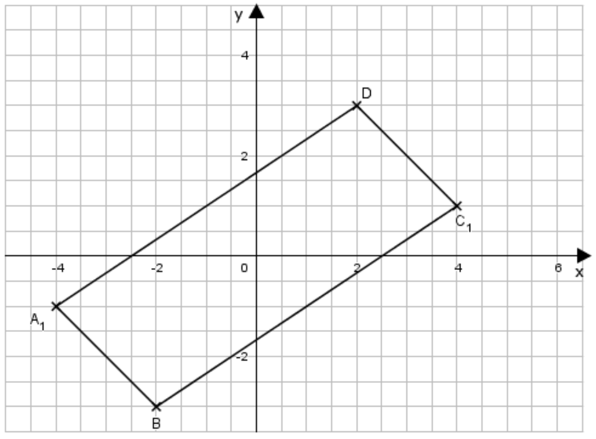
Mittlere-Reife-Prüfung 2015 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Punkte $A_n\ (2 \cdot \sin\varphi - 4|3 \cdot \sin\varphi - 1)$ mit $\varphi \in [0°; 90°]$ legen zusammen mit den Punkten $B(-2|-3)$ und $D(2|3)$ Parallelogramme $A_n\,B\,C_n\,D$ fest.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

In das Koordinatensystem zu A 2. ist das Parallelogramm $A_1\,B\,C_1\,D$ für $\varphi = 0°$ eingezeichnet.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_2 für $\varphi = 90°$ und zeichnen Sie sodann das Parallelogramm $A_2\,B\,C_2\,D$ ein.

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Trägergraphen t der Punkte A_n gilt: $y = \frac{3}{2}x + 5$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Zeichnen Sie den Trägergraphen t in das Koordinatensystem zu A 2. ein.

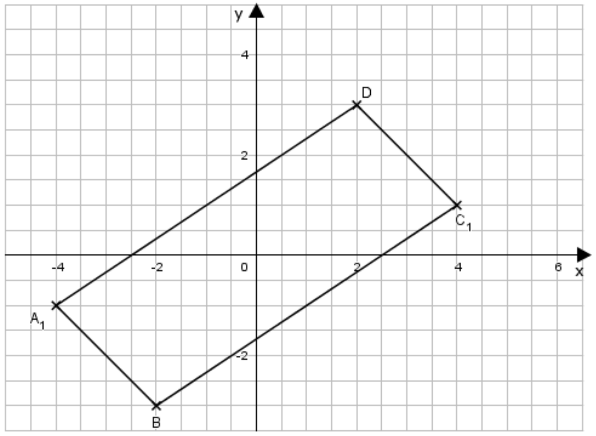
Aufgabe A2.3 (4 Punkte)

Begründen Sie, dass die Flächeninhalte A aller Parallelogramme $A_n\,B\,C_n\,D$ maßgleich sind.

Lösung

Aufgabe A2.

Punkte $A_n\ (2 \cdot \sin\varphi - 4|3 \cdot \sin\varphi - 1)$ mit $\varphi \in [0°; 90°]$ legen zusammen mit den Punkten $B(-2|-3)$ und $D(2|3)$ Parallelogramme $A_n\, B\, C_n\, D$ fest.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

In das Koordinatensystem zu A 2. ist das Parallelogramm $A_1\, B\, C_1\, D$ für $\varphi = 0°$ eingezeichnet.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_2 für $\varphi = 90°$ und zeichnen Sie sodann das Parallelogramm $A_2\, B\, C_2\, D$ ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Koordinaten von Punkten ermitteln

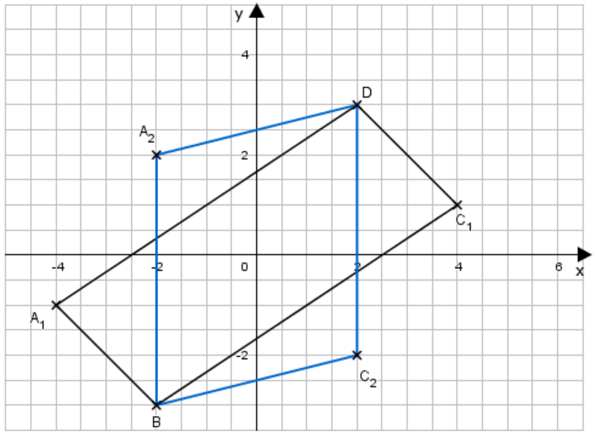
$A_n\ (2 \cdot \sin\varphi - 4|3 \cdot \sin\varphi - 1)$

$A_2\ (2 \cdot \sin 90° - 4|3 \cdot \sin 90° - 1)$

$A_2\ (2 \cdot 1|3 \cdot 1 - 1)$

$A_2\ (-2|2)$

Skizze



Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Trägergraphen t der Punkte A_n gilt: $y = \frac{3}{2}x + 5$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Zeichnen Sie den Trägergraphen t in das Koordinatensystem zu A 2. ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$A_n\ (2 \cdot \sin\varphi - 4 | 3 \cdot \sin\varphi - 1)$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Trägergraphen werden bestimmt indem die Koordinaten der Punkte A_n unabhängig vom Winkel φ dargestellt werden.

Hierzu wird die x- Koordindate Punktes A_n nach $\sin\varphi$ aufgelöst und anschließend in der y- Koordinate φ durch den berechneten Term ersetzt.

$x = 2 \cdot \sin\varphi - 4 \qquad | + 4$

$x + 4 = 2 \cdot \sin\varphi \qquad | : 2$

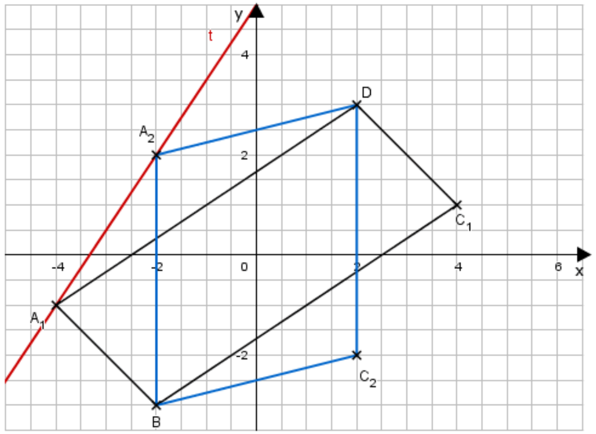
$\sin\varphi = \frac{1}{2}x + 2$

$y = 3 \cdot \sin\varphi - 1$

$y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) - 1 = \frac{3}{2}x + 6 - 1$

$t : y = \frac{3}{2}x + 5$

Skizze



Aufgabe A2.3 (4 Punkte)

Begründen Sie, dass die Flächeninhalte A aller Parallelogramme $A_n B C_n D$ maßgleich sind.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Flächeninhalt eines Vierecks

$A_n\ (2 \cdot \sin\varphi - 4 | 3 \cdot \sin\varphi - 1)$; $B(-2| - 3)$; $D(2|3)$

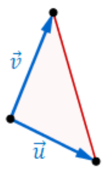
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA_n} = \overrightarrow{A_n} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin\varphi - 4 \\ 3 \cdot \sin\varphi - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin\varphi - 2 \\ 3 \cdot \sin\varphi + 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$



Da in der Aufgabe der Flächeninhalt eines Vierecks gefragt ist muss der Flächeninhalt des Dreiecks doppelt genommen wereden.

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \cdot \sin\varphi - 2 \\ 6 & 3 \cdot \sin\varphi + 2 \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A = 4 \cdot (3 \cdot \sin\varphi + 2) - 6 \cdot (2 \cdot \sin\varphi - 2)$$

$$A = 12 \cdot \sin\varphi + 8 - 12 \cdot \sin\varphi + 12$$

$$A = 20 \text{ FE}$$

Alle Parallelogramme $A_n\,B\,C_n\,D$ haben unabhängig von φ den gleichen Flächeninhalt (20 FE).