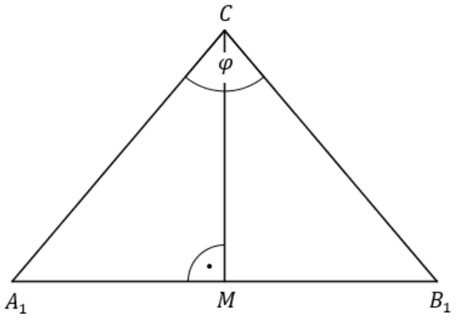
Mittlere-Reife-Prüfung 2016 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die gleichschenkligen Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ haben die Basen $[A_n\,B_n]$ und die gemeinsame Höhe $[C\,M]$.
Die Winkel $A_n\,C\,B_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]0°; 180°[$.
Es gilt: $\overline{C\,M} = 5$ cm.



Die Zeichnung zeigt das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ für $\varphi = 80°$.

Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_2\,B_2\,C$ für $\varphi = 50°$ in die Zeichnung zu A 1. ein.

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ in Abhängigkeit von φ gilt: $A(\varphi) = 25 \cdot \tan\frac{\varphi}{2}$ cm^2.

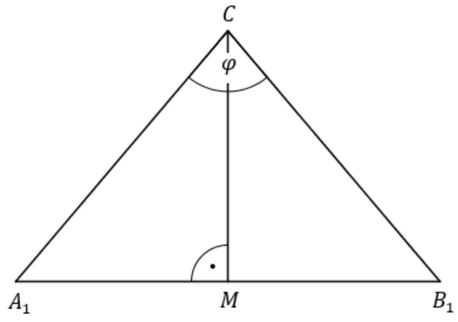
Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_3\,B_3\,C$ ist um 25% größer als der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2\,B_2\,C$. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $A_3\,C\,B_3$ des Dreiecks $A_3\,B_3\,C$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung

Aufgabe A1.

Die gleichschenkligen Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ haben die Basen $[A_n\,B_n]$ und die gemeinsame Höhe $[C\,M]$.
Die Winkel $A_n\,C\,B_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]0°; 180°[$.
Es gilt: $\overline{C\,M} = 5$ cm.



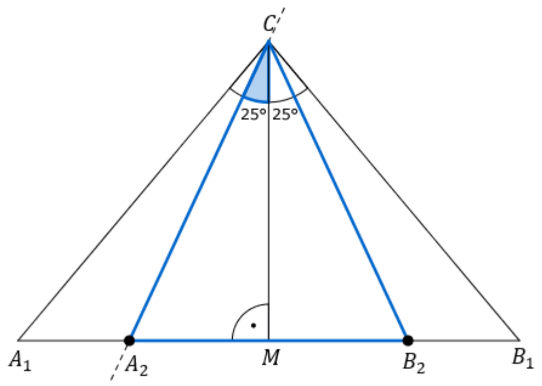
Die Zeichnung zeigt das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ für $\varphi = 80°$.

Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_2\,B_2\,C$ für $\varphi = 50°$ in die Zeichnung zu A 1. ein.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze



Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

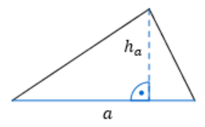
Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ in Abhängigkeit von φ gilt: $A(\varphi) = 25 \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$ cm^2.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt A in Abhängigkeit von φ:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



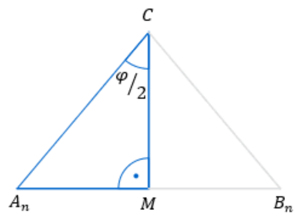
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n\,B_n} \cdot \overline{M\,C}$$

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{A_n\,M} \cdot 5$$



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $\triangle A_n\,M\,C$:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.
In diesem Fall ist $\overline{A_n\,M}$ Gegenkathete und $\overline{M\,C}$ Ankathete zum Winkel φ.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{A_n\,M}}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A_n\,M} = 5\cdot\tan\frac{\varphi}{2}$$

Einsetzen von $\overline{A_n\,M}$ in $A(\varphi)$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot\tan\frac{\varphi}{2} = 25\cdot\tan\frac{\varphi}{2}$$

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_3\,B_3\,C$ ist um 25% größer als der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2\,B_2\,C$. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $A_3\,C\,B_3$ des Dreiecks $A_3\,B_3\,C$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Winkel bestimmen

$$A_{\triangle A_2\,B_2\,C} = 25\cdot\tan 25^\circ$$

$$A_{\triangle A_3\,B_3\,C} = 25\cdot\tan\frac{\varphi}{2} \qquad \text{(s. Teilaufgabe 1.2)}$$

Erläuterung: *Prozentrechnung*

Der Flächeninhalt (Y) des Dreiecks $A_3\,B_3\,C$ ist um 25% größer als der Flächeninhalt (X) des Dreiecks $A_2\,B_2\,C$.

$$Y = X + 0,25\cdot X = (1+0,25)\cdot X = 1,25\cdot X$$

$$A_{\triangle A_3\,B_3\,C} = 1,25\cdot A_{\triangle A_2\,B_2\,C}$$

$$25\cdot\tan\frac{\varphi}{2} = 1,25\cdot 25\cdot\tan 25^\circ \qquad : 25$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = 1,25\cdot\tan 25^\circ \qquad |\tan^{-1}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ aus $1,25\cdot\tan 25^\circ$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $1,25\cdot\tan 25^\circ$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1}\left(1,25\cdot\tan 25^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi \approx 60,47^\circ$$