

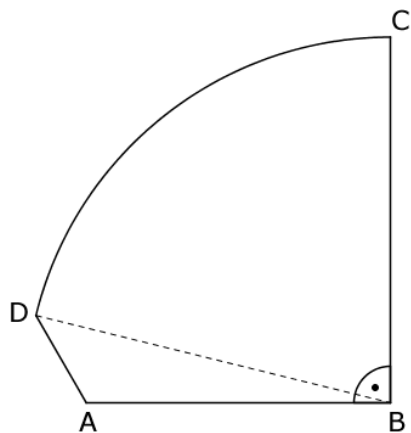
Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Die Figur $ABCD$ dient als Schnittvorlage für eine Glasscheibe (siehe Skizze).

Der Kreisbogen \widehat{CD} hat den Punkt B als Mittelpunkt und den Radius $r = \overline{BC}$.

Es gilt: $\overline{AB} = 50,0$ cm; $\overline{BC} = 60,0$ cm, $\angle CBA = 90^\circ$; $\angle BAD = 120^\circ$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[DA]$.

[Teilergebnis: $\angle DBA = 13,8^\circ$; Ergebnis: $\overline{DA} = 16,5$ cm]

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Glasscheibe wird aus einer quadratischen Glasplatte herausgeschnitten. Dazu bewegt sich ein Laserschneider mit einer Geschwindigkeit von 30 cm pro Sekunde entlang des

Kreisbogens \widehat{CD} und der Strecke $[DA]$.

Berechnen Sie die hierfür benötigte Zeit.

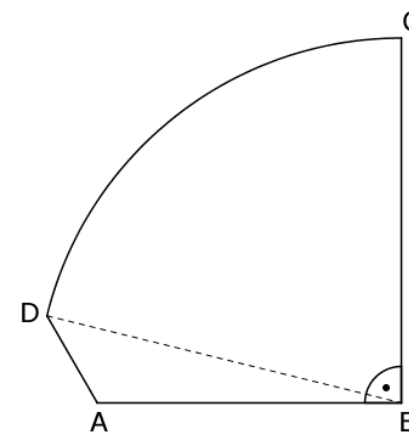
Lösung

Aufgabe A3.

Die Figur $ABCD$ dient als Schnittvorlage für eine Glasscheibe (siehe Skizze).

Der Kreisbogen \widehat{CD} hat den Punkt B als Mittelpunkt und den Radius $r = \overline{BC}$.

Es gilt: $\overline{AB} = 50,0$ cm; $\overline{BC} = 60,0$ cm, $\angle CBA = 90^\circ$; $\angle BAD = 120^\circ$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

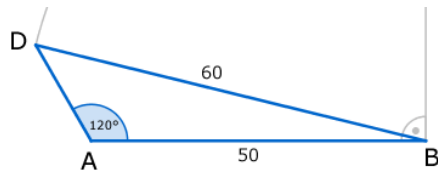
Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[DA]$.

[Teilergebnis: $\angle DBA = 13,8^\circ$; Ergebnis: $\overline{DA} = 16,5$ cm]

Lösung zu Aufgabe A3.1

Länge einer Strecke



Gegeben: $\overline{AB} = 50,0 \text{ cm}$, $\overline{BD} = 60,0 \text{ cm}$ und $\angle BAD = 120^\circ$

Gesucht: \overline{DA}

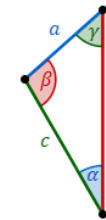
Wir betrachten das stumpfwinklige Dreieck ABD .

Erläuterung: *Erläuterung*

Um den Kosinussatz im Dreieck ABD verwenden zu können muss der Winkel $\angle DBA$ berechnet werden.

Berechnung des Winkel $\angle DBA$:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck ABD gilt somit: $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ADB} = \frac{\overline{BD}}{\sin \angle BAD} = \frac{\overline{DA}}{\sin \angle DBA}$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \angle BAD} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ADB}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecken $[BC]$ und $[BD]$ den Kreissektor BCD begrenzen gilt:

$$\overline{BC} = \overline{BD} = 60,0 \text{ cm.}$$

$$\frac{60}{\sin 120^\circ} = \frac{50}{\sin \angle ADB} \quad | \cdot \sin \angle ADB \quad | \cdot \sin 120^\circ$$

$$60 \cdot \sin \angle ADB = 50 \cdot \sin 120^\circ \quad | : 60$$

$$\sin \angle ADB = \frac{50 \cdot \sin 120^\circ}{60}$$

$$\Rightarrow \angle ADB = 46,2^\circ$$

Winkel $\angle D B A$ bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

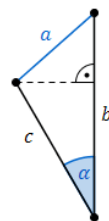
$$\angle D B A = 180^\circ - \angle B A D - \angle A D B$$

$$\angle D B A = 180^\circ - 120^\circ - 46,2^\circ$$

$$\angle D B A = 13,8^\circ$$

Strecke $\overline{D A}$ bestimmen:

Erläuterung:



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{D A}^2 = \overline{A B}^2 + \overline{B D}^2 - 2 \cdot \overline{A B} \cdot \overline{B D} \cdot \cos \angle D B A$$

$$\overline{D A} = \sqrt{\overline{A B}^2 + \overline{B D}^2 - 2 \cdot \overline{A B} \cdot \overline{B D} \cdot \cos \angle D B A}$$

$$\overline{D A} = \sqrt{50^2 + 60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos 13,8^\circ}$$

$$\overline{D A} = 16,5 \text{ cm}$$

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Glasscheibe wird aus einer quadratischen Glasplatte herausgeschnitten. Dazu bewegt sich ein Laserschneider mit einer Geschwindigkeit von 30 cm pro Sekunde entlang des

Kreisbogens $\widehat{C D}$ und der Strecke $[D A]$.

Berechnen Sie die hierfür benötigte Zeit.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Bogenlänge

Gegeben: $\overline{B C} = 60 \text{ cm}$

Gesucht: $\widehat{C D}$

Erläuterung: *Kreisbogen berechnen*

Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

Der Mittelpunktswinkel α des Kreisbogens $\widehat{C D}$ ist der Winkel $\angle C B D$:

$$\angle C B D = 90^\circ - \angle D B A$$

$$\angle C B D = 90^\circ - 13,8^\circ = 76,2^\circ$$

Damit ergibt sich für die Bogenlänge $\widehat{C D}$:

$$\widehat{C D} = 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot \frac{76,2^\circ}{360^\circ}$$

$$\widehat{C D} = 79,8 \text{ cm}$$

Physikalische Anwendung

Berechnung der Schnittlänge des Laserschneiders:

$$s = \widehat{CD} + \overline{DA}$$

$$s = 79,8 + 16,5$$

$$s = 96,3 \text{ cm}$$

Berechnung der dafür benötigten Zeit t :

$$\frac{30 \text{ cm}}{s} = \frac{96,3 \text{ cm}}{t} \quad | \cdot t \quad | : 30 \text{ cm}$$

$$\frac{t}{s} = \frac{96,3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} \quad | \cdot s$$

$$t = \frac{96,3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} \cdot s$$

$$t = 3,2s$$