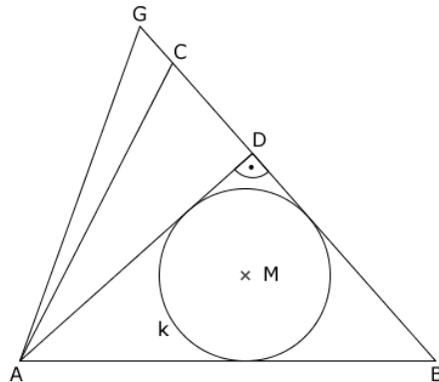


Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 9,5$ cm.
Der Punkt D ist der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt A auf die Seite $[BC]$ (siehe Skizze).



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck ABC und die Strecke $[AD]$.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels CBA , das Maß ε des Winkels BAD und die Länge der Strecke $[AD]$.

[Ergebnisse: $\beta = 48,36^\circ$, $\varepsilon = 41,64^\circ$]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Der Punkt G auf der Verlängerung der Strecke $[BC]$ über C hinaus ist ein Eckpunkt des Dreiecks ABG . Der Winkel BAG hat das Maß 70° .

Zeichnen Sie das Dreieck ABG und berechnen Sie die Länge der Strecke $[CG]$.

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Im Dreieck ABD berührt der Inkreis k die Seite $[AB]$ im Punkt E und die Seite $[AD]$ im Punkt F .

Zeichnen Sie den Inkreis k mit seinem Mittelpunkt M und die Strecken $[ME]$ und $[MF]$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels AMB und den Inkreisradius $r = \overline{ME}$.

[Ergebnisse: $\varphi = 135^\circ$, $r = 2,06$ cm]

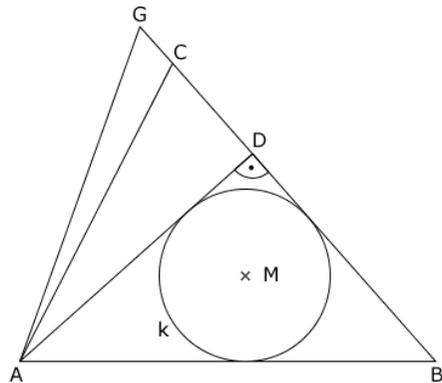
Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Flächenstücks AEF , das vom Kreisbogen \widehat{FE} sowie von den Strecken $[EA]$ und $[AF]$ begrenzt wird.

Lösung

Aufgabe B2.

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 9,5$ cm.
Der Punkt D ist der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt A auf die Seite $[BC]$ (siehe Skizze).



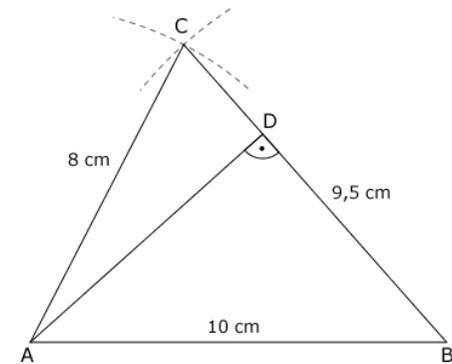
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck ABC und die Strecke $[AD]$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Dreiecks ABC :

- Festlegen der Strecke $[AB]$ mit $\overline{AB} = 10$ cm.
- Einzeichnen eines Kreises um A mit Radius $r = \overline{AC} = 8$ cm.
- Einzeichnen eines Kreises um B mit Radius $r = \overline{BC} = 9,5$ cm.

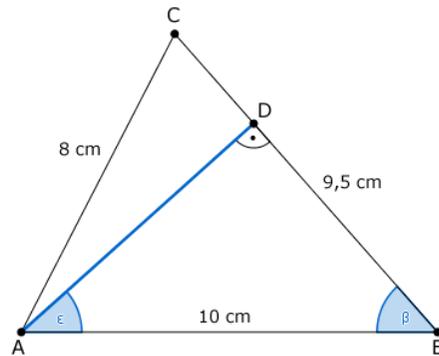
Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels CBA , das Maß ε des Winkels BAD und die Länge der Strecke $[AD]$.

[Ergebnisse: $\beta = 48,36^\circ$, $\varepsilon = 41,64^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Winkel bestimmen

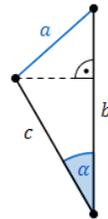


Gegeben: $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 9,5 \text{ cm}$

Gesucht: $\angle CBA = \beta$, $\angle BAD = \varepsilon$ und \overline{AD}

Der Winkel β wird mit dem Kosinussatz berechnet.

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad | \quad + 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 & | \quad - \overline{AC}^2 \\ 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 & | \quad : (2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}) \\ \cos \beta &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}} \\ \cos \beta &= \frac{10^2 + 9,5^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9,5} & | \quad \cos^{-1} \\ \beta &= 48,36^\circ \end{aligned}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

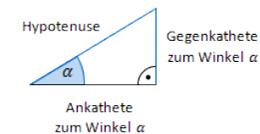
Im rechtwinkligen Dreieck ABD gilt: $\varepsilon + 90^\circ + \beta = 180^\circ$

Im rechtwinkligen Dreieck ABD gilt:

$$\varepsilon = 180^\circ - \beta - 90^\circ = 180^\circ - 48,36 - 90^\circ = 41,64^\circ$$

Zur Berechnung von \overline{AD} wird ebenfalls das rechtwinklige Dreieck ABD herangezogen.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\sin 48,36^\circ = \frac{\overline{AD}}{10} \cdot 10$$

$$\overline{AD} = 10 \cdot \sin 48,36^\circ$$

$$\overline{AD} = 7,47 \text{ cm}$$

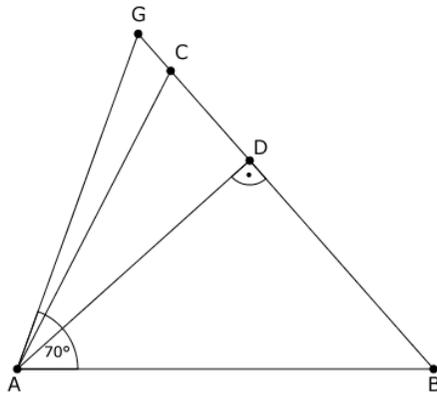
Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Der Punkt G auf der Verlängerung der Strecke $[BC]$ über C hinaus ist ein Eckpunkt des Dreiecks ABG . Der Winkel BAG hat das Maß 70° .

Zeichnen Sie das Dreieck ABG und berechnen Sie die Länge der Strecke $[CG]$.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Verlängerung der Strecke $[BC]$ um den Punkt C hinaus.
- 2) Antragen des Winkels $\angle BAG = 70^\circ$ am Punkt A .
- 3) Antragen des Punktes G an der Schnittstelle zwischen Winkelschenkel und der Verlängerung der Seite $[BD]$.
- 4) Einzeichnen des Dreiecks ABG .

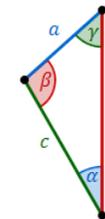
Länge einer Strecke

Gesucht: \overline{CG}

Es gilt: $\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC}$

Somit muss als erstes die Streckenlänge \overline{BG} berechnet werden.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck ABG gilt somit:
$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle AGB} = \frac{\overline{BG}}{\sin \angle BAG} = \frac{\overline{GA}}{\sin \angle GBA}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle AGB} = \frac{\overline{BG}}{\sin \angle BAG}$$

Der Winkel $\angle BAG = 70^\circ$ ist bereits gegeben.

Zur Berechnung des Winkels $\angle AGB$ wird das Dreieck ABG herangezogen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\begin{aligned}\angle AGB &= 180^\circ - \angle BAG - \beta \\ \angle AGB &= 180^\circ - 70^\circ - 48,36^\circ \\ \angle AGB &= 61,64^\circ\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der beiden Winkel $\angle BAG = 70^\circ$, $\angle AGB = 61,64^\circ$ und der Streckenlänge $\overline{AB} = 10$ cm ergibt sich:

$$\frac{10}{\sin 61,64^\circ} = \frac{\overline{BG}}{\sin 70^\circ} \quad | \cdot \sin 70^\circ$$

$$\overline{BG} = \frac{10 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 61,64^\circ}$$

$$\overline{BG} = 10,68 \text{ cm}$$

Mithilfe der Strecke $\overline{BG} = 10,68$ cm kann nun \overline{CG} berechnet werden.

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 10,68 - 9,5 = 1,18 \text{ cm}$$

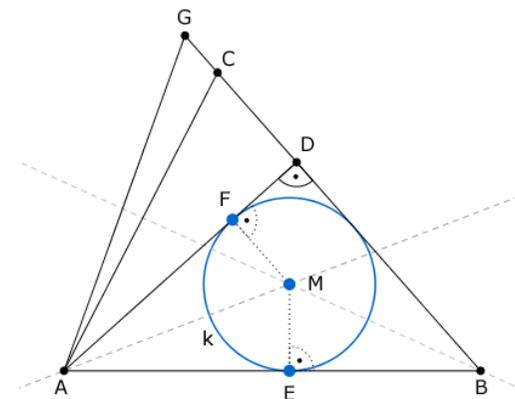
Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Im Dreieck ABD berührt der Inkreis k die Seite $[AB]$ im Punkt E und die Seite $[AD]$ im Punkt F .

Zeichnen Sie den Inkreis k mit seinem Mittelpunkt M und die Strecken $[ME]$ und $[MF]$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze



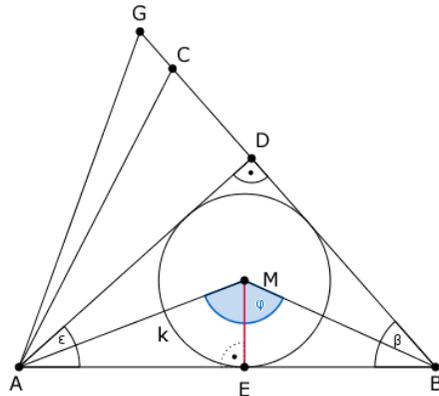
Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Einzeichnen der Winkelhalbierenden des Winkel $\angle BAG$.
- 2) Einzeichnen der Winkelhalbierenden des Winkel $\angle GBA$.
- 3) Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden ergibt den Punkt M .
- 4) Einzeichnen des Punktes E , indem man das Lot vom Punkt M zur Strecke $[AB]$ fällt.
- 5) Einzeichnen des Punktes F , indem man das Lot vom Punkt M zur Strecke $[AD]$ fällt.
- 6) Zeichnen des Kreises k um den Punkt M mit Radius $r = \overline{ME}$.

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels AMB und den Inkreisradius $r = \overline{ME}$.
[Ergebnisse: $\varphi = 135^\circ$, $r = 2,06$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.5

Winkel bestimmen

Gegeben: $\beta = 48,36^\circ$ und $\varepsilon = 41,64^\circ$

Gesucht: $\angle AMB = \varphi$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Da sich der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ergibt, gilt im Dreieck AMB : $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ \quad | \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi = 180^\circ - \frac{41,64^\circ}{2} - \frac{48,36^\circ}{2}$$

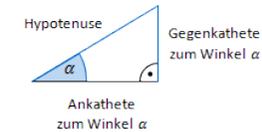
$$\varphi = 135^\circ$$

Länge einer Strecke

Berechnung des Inkreisradius $r = \overline{ME}$:

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck AEM .

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

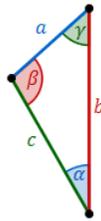
$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{ME}}{\overline{AM}}$$

Um die Länge der Strecke \overline{ME} bestimmen zu können muss als erstes die Streckenlänge \overline{AM} berechnet werden.

Im Dreieck AMB gilt:

Erläuterung: *Sinussatz*

In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck ABM gilt somit: $\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{AM}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{BM}{\sin \frac{\delta}{2}}$

$$\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{AM}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{10}{\sin 135^\circ} = \frac{AM}{\sin \frac{48,36^\circ}{2}} \quad | \cdot \sin \frac{48,36^\circ}{2}$$

$$AM = \frac{10 \cdot \sin \frac{48,36^\circ}{2}}{\sin 135^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = 5,79 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{AM} = 5,79 \text{ cm}$ kann nun in $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{ME}}{\overline{AM}}$ eingesetzt werden um \overline{ME} zu berechnen.

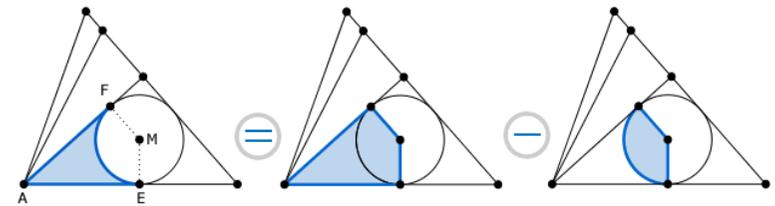
$$\sin \frac{41,64^\circ}{2} = \frac{\overline{ME}}{5,79} \quad | \cdot 5,79$$

$$\overline{ME} = \sin \frac{41,64^\circ}{2} \cdot 5,79$$

$$\Rightarrow \overline{ME} = 2,06 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Flächenstücks AEF , das vom Kreisbogen \widehat{FE} sowie von den Strecken $[EA]$ und $[AF]$ begrenzt wird.

Lösung zu Aufgabe B2.6**Flächenberechnung**

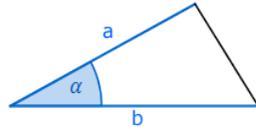
$$A_{AEF} = A_{AEMF} - A_{EMF}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Es gilt: $A_{AEMF} = 2 \cdot A_{AME}$, da die Dreiecke AEM und AMF kongruent sind.

$$A_{AEMF} = 2 \cdot A_{AME}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{AEMF} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{ME} \cdot \sin \angle AME$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\angle AME = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\varepsilon}{2} = 90^\circ - \frac{41,64^\circ}{2} = 69,18^\circ$$

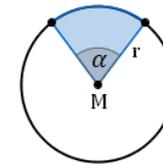
Damit ergibt sich:

$$A_{AEMF} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,79 \cdot 2,06 \cdot \sin 69,18^\circ$$

$$A_{AEMF} = 11,14 \text{ cm}^2$$

Es folgt die Berechnung des Flächeninhaltes des Sektors A_{EMF} :

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{EMF} = \overline{ME}^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot \angle AME}{360^\circ}$$

$$A_{EMF} = 2,06^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 69,18^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{EMF} = 5,12 \text{ cm}^2$$

damit ergibt sich für die gesuchte Fläche:

$$A_{AEF} = A_{AEMF} - A_{EMF}$$

$$A_{AEF} = 11,14 \text{ cm}^2 - 5,12 \text{ cm}^2$$

$$A_{AEF} = 6,02 \text{ cm}^2$$