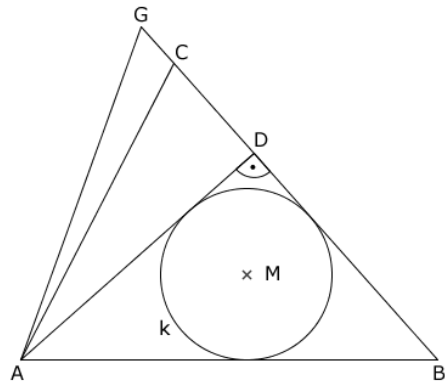


## Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Gegeben ist das Dreieck  $ABC$  mit  $\overline{AB} = 10$  cm,  $\overline{AC} = 8$  cm,  $\overline{BC} = 9,5$  cm.  
Der Punkt  $D$  ist der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt  $A$  auf die Seite  $[BC]$  (siehe Skizze).



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Aufgabe B2.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck  $ABC$  und die Strecke  $[AD]$ .

### Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\beta$  des Winkels  $CBA$ , das Maß  $\varepsilon$  des Winkels  $BAD$  und die Länge der Strecke  $[AD]$ .

[Ergebnisse:  $\beta = 48,36^\circ$ ,  $\varepsilon = 41,64^\circ$ ]

### Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Der Punkt  $G$  auf der Verlängerung der Strecke  $[BC]$  über  $C$  hinaus ist ein Eckpunkt des Dreiecks  $ABG$ . Der Winkel  $BAG$  hat das Maß  $70^\circ$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $ABG$  und berechnen Sie die Länge der Strecke  $[CG]$ .

### Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Im Dreieck  $ABD$  berührt der Inkreis  $k$  die Seite  $[AB]$  im Punkt  $E$  und die Seite  $[AD]$  im Punkt  $F$ .

Zeichnen Sie den Inkreis  $k$  mit seinem Mittelpunkt  $M$  und die Strecken  $[ME]$  und  $[MF]$  in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

### Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels  $AMB$  und den Inkreisradius  $r = \overline{ME}$ .

[Ergebnisse:  $\varphi = 135^\circ$ ,  $r = 2,06$  cm]

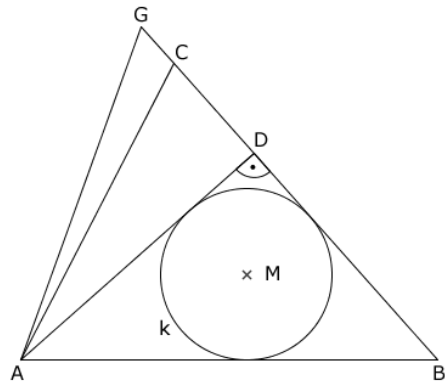
### Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  des Flächenstücks  $AEF$ , das vom Kreisbogen  $\widehat{FE}$  sowie von den Strecken  $[EA]$  und  $[AF]$  begrenzt wird.

## Lösung

## Aufgabe B2.

Gegeben ist das Dreieck  $ABC$  mit  $\overline{AB} = 10$  cm,  $\overline{AC} = 8$  cm,  $\overline{BC} = 9,5$  cm.  
Der Punkt  $D$  ist der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt  $A$  auf die Seite  $[BC]$  (siehe Skizze).



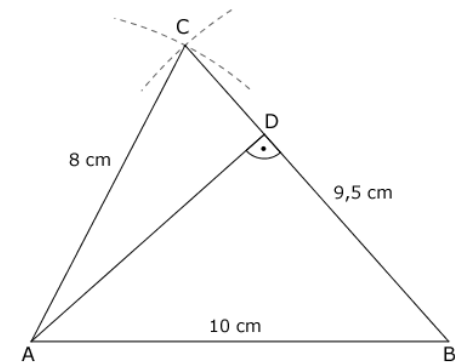
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Aufgabe B2.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck  $ABC$  und die Strecke  $[AD]$ .

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Dreiecks  $ABC$ :

- Festlegen der Strecke  $[AB]$  mit  $\overline{AB} = 10$  cm.
- Einzeichnen eines Kreises um  $A$  mit Radius  $r = \overline{AC} = 8$  cm.
- Einzeichnen eines Kreises um  $B$  mit Radius  $r = \overline{BC} = 9,5$  cm.

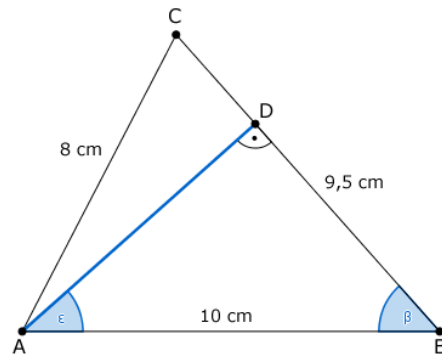
## Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\beta$  des Winkels  $CBA$ , das Maß  $\varepsilon$  des Winkels  $BAD$  und die Länge der Strecke  $[AD]$ .

[Ergebnisse:  $\beta = 48,36^\circ$ ,  $\varepsilon = 41,64^\circ$ ]

Lösung zu Aufgabe B2.2

*Winkel bestimmen*

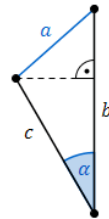


Gegeben:  $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 9,5 \text{ cm}$

Gesucht:  $\angle CBA = \beta$ ,  $\angle BAD = \varepsilon$  und  $\overline{AD}$

Der Winkel  $\beta$  wird mit dem Kosinussatz berechnet.

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten  $b$  und  $c$  und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel  $\alpha$  gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad | \quad + 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 & | \quad - \overline{AC}^2 \\ 2 \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 & | \quad : (2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}) \\ \cos \beta &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}} \\ \cos \beta &= \frac{10^2 + 9,5^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9,5} & | \quad \cos^{-1} \\ \beta &= 48,36^\circ \end{aligned}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

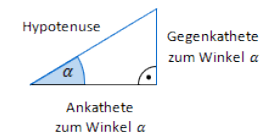
Im rechtwinkligen Dreieck  $ABD$  gilt:  $\varepsilon + 90^\circ + \beta = 180^\circ$

Im rechtwinkligen Dreieck  $ABD$  gilt:

$$\varepsilon = 180^\circ - \beta - 90^\circ = 180^\circ - 48,36 - 90^\circ = 41,64^\circ$$

Zur Berechnung von  $\overline{AD}$  wird ebenfalls das rechtwinklige Dreieck  $ABD$  herangezogen.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\sin 48,36^\circ = \frac{\overline{AD}}{10} \cdot 10$$

$$\overline{AD} = 10 \cdot \sin 48,36^\circ$$

$$\overline{AD} = 7,47 \text{ cm}$$

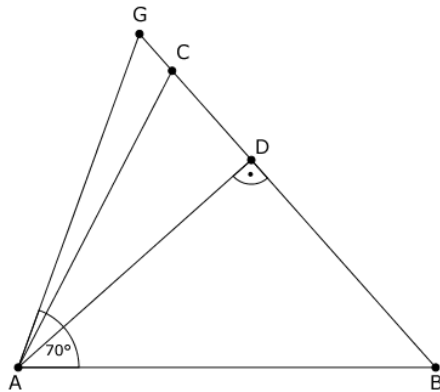
### Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Der Punkt  $G$  auf der Verlängerung der Strecke  $[BC]$  über  $C$  hinaus ist ein Eckpunkt des Dreiecks  $ABG$ . Der Winkel  $BAG$  hat das Maß  $70^\circ$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $ABG$  und berechnen Sie die Länge der Strecke  $[CG]$ .

### Lösung zu Aufgabe B2.3

#### Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Verlängerung der Strecke  $[BC]$  um den Punkt  $C$  hinaus.
- 2) Antragen des Winkels  $\angle BAG = 70^\circ$  am Punkt  $A$ .
- 3) Antragen des Punktes  $G$  an der Schnittstelle zwischen Winkelschenkel und der Verlängerung der Seite  $[BD]$ .
- 4) Einzeichnen des Dreiecks  $ABG$ .

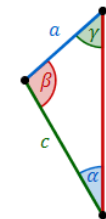
#### Länge einer Strecke

Gesucht:  $\overline{CG}$

Es gilt:  $\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC}$

Somit muss als erstes die Streckenlänge  $\overline{BG}$  berechnet werden.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $ABG$  gilt somit:  $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle AGB} = \frac{\overline{BG}}{\sin \angle BAG} = \frac{\overline{GA}}{\sin \angle GBA}$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle AGB} = \frac{\overline{BG}}{\sin \angle BAG}$$

Der Winkel  $\angle BAG = 70^\circ$  ist bereits gegeben.

Zur Berechnung des Winkels  $\angle AGB$  wird das Dreieck  $ABG$  herangezogen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

$$\begin{aligned}\angle AGB &= 180^\circ - \angle BAG - \beta \\ \angle AGB &= 180^\circ - 70^\circ - 48,36^\circ \\ \angle AGB &= 61,64^\circ\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der beiden Winkel  $\angle BAG = 70^\circ$ ,  $\angle AGB = 61,64^\circ$  und der Streckenlänge  $\overline{AB} = 10$  cm ergibt sich:

$$\frac{10}{\sin 61,64^\circ} = \frac{\overline{BG}}{\sin 70^\circ} \quad | \cdot \sin 70^\circ$$

$$\overline{BG} = \frac{10 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 61,64^\circ}$$

$$\overline{BG} = 10,68 \text{ cm}$$

Mithilfe der Strecke  $\overline{BG} = 10,68$  cm kann nun  $\overline{CG}$  berechnet werden.

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 10,68 - 9,5 = 1,18 \text{ cm}$$

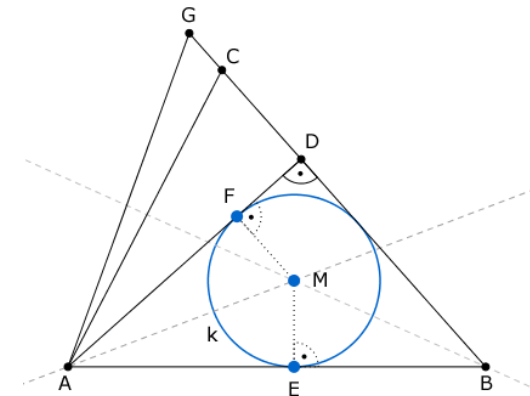
#### Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Im Dreieck  $ABD$  berührt der Inkreis  $k$  die Seite  $[AB]$  im Punkt  $E$  und die Seite  $[AD]$  im Punkt  $F$ .

Zeichnen Sie den Inkreis  $k$  mit seinem Mittelpunkt  $M$  und die Strecken  $[ME]$  und  $[MF]$  in die Zeichnung zu B.2.1 ein.

#### Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze



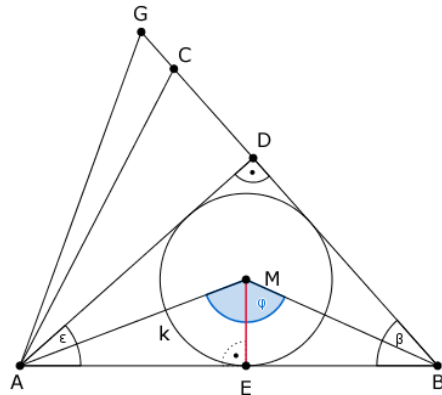
Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Einzeichnen der Winkelhalbierenden des Winkel  $\angle BAG$ .
- 2) Einzeichnen der Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle GBA$ .
- 3) Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden ergibt den Punkt  $M$ .
- 4) Einzeichnen des Punktes  $E$ , indem man das Lot vom Punkt  $M$  zur Strecke  $[AB]$  fällt.
- 5) Einzeichnen des Punktes  $F$ , indem man das Lot vom Punkt  $M$  zur Strecke  $[AD]$  fällt.
- 6) Zeichnen des Kreises  $k$  um den Punkt  $M$  mit Radius  $r = \overline{ME}$ .

#### Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels  $AMB$  und den Inkreisradius  $r = \overline{ME}$ .  
[Ergebnisse:  $\varphi = 135^\circ$ ,  $r = 2,06$  cm]

#### Lösung zu Aufgabe B2.5

**Winkel bestimmen**

Gegeben:  $\beta = 48,36^\circ$  und  $\varepsilon = 41,64^\circ$

Gesucht:  $\angle AMB = \varphi$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Da sich der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ergibt, gilt im Dreieck  $AMB$ :  $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ \quad | \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi = 180^\circ - \frac{41,64^\circ}{2} - \frac{48,36^\circ}{2}$$

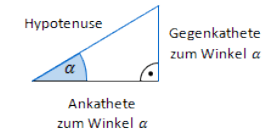
$$\varphi = 135^\circ$$

**Länge einer Strecke**

Berechnung des Inkreisradius  $r = \overline{ME}$ :

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck  $AEM$ .

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

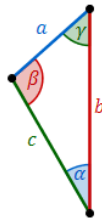
$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{ME}}{\overline{AM}}$$

Um die Länge der Strecke  $\overline{ME}$  bestimmen zu können muss als erstes die Streckenlänge  $\overline{AM}$  berechnet werden.

Im Dreieck  $AMB$  gilt:

Erläuterung: *Sinussatz*

In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $ABM$  gilt somit:  $\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{AM}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{BM}{\sin \frac{\delta}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \varphi} &= \frac{AM}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ \frac{10}{\sin 135^\circ} &= \frac{AM}{\sin \frac{48,36^\circ}{2}} \quad | \cdot \sin \frac{48,36^\circ}{2} \\ AM &= \frac{10 \cdot \sin \frac{48,36^\circ}{2}}{\sin 135^\circ} \\ \Rightarrow \overline{AM} &= 5,79 \text{ cm} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

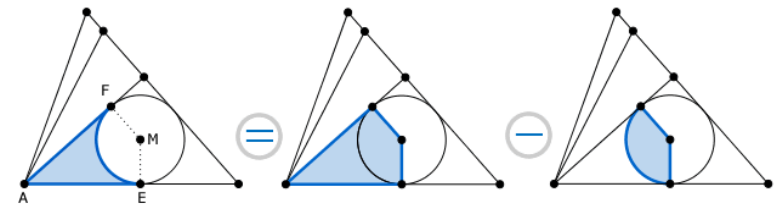
$\overline{AM} = 5,79$  cm kann nun in  $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{ME}}{\overline{AM}}$  eingesetzt werden um  $\overline{ME}$  zu berechnen.

$$\sin \frac{41,64^\circ}{2} = \frac{\overline{ME}}{5,79} \quad | \cdot 5,79$$

$$\begin{aligned} \overline{ME} &= \sin \frac{41,64^\circ}{2} \cdot 5,79 \\ \Rightarrow \overline{ME} &= 2,06 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Aufgabe B2.6** (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  des Flächenstücks  $AEF$ , das vom Kreisbogen  $\widehat{FE}$  sowie von den Strecken  $[EA]$  und  $[AF]$  begrenzt wird.

**Lösung zu Aufgabe B2.6****Flächenberechnung**

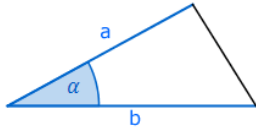
$$A_{AEF} = A_{AEMF} - A_{AEM}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Es gilt:  $A_{AEMF} = 2 \cdot A_{AEM}$ , da die Dreiecke  $AEM$  und  $AMF$  kongruent sind.

$$A_{AEMF} = 2 \cdot A_{AEM}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{AEMF} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{ME} \cdot \sin \angle AME$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

$$\angle AME = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\varepsilon}{2} = 90^\circ - \frac{41,64^\circ}{2} = 69,18^\circ$$

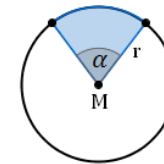
Damit ergibt sich:

$$A_{AEMF} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,79 \cdot 2,06 \cdot \sin 69,18^\circ$$

$$A_{AEMF} = 11,14 \text{ cm}^2$$

Es folgt die Berechnung des Flächeninhaltes des Sektors  $A_{EMF}$ :

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt  $A$  eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$  ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$  gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{EMF} = \overline{ME}^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot \angle AME}{360^\circ}$$

$$A_{EMF} = 2,06^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 69,18^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{EMF} = 5,12 \text{ cm}^2$$

damit ergibt sich für die gesuchte Fläche:

$$A_{AEF} = A_{AEMF} - A_{EMF}$$

$$A_{AEF} = 11,14 \text{ cm}^2 - 5,12 \text{ cm}^2$$

$$A_{AEF} = 6,02 \text{ cm}^2$$