

Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

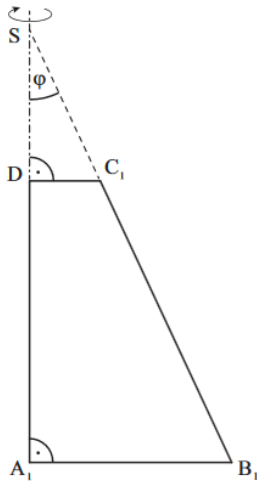
Trapeze $A_n B_n C_n D$ mit den parallelen Seiten $[DC_n]$ und $[A_n B_n]$ rotieren um die Gerade SD .

Es gilt:

$$A_n \in SD; \overline{SD} = 3 \text{ cm}; \overline{A_n B_n} = 4 \text{ cm}; \angle B_n A_n D = 90^\circ.$$

Die Winkel $DS C_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 53,13^\circ[$.

Die Zeichnung zeigt das Trapez $A_1 B_1 C_1 D$ für $\varphi = 25^\circ$.



Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie in die Zeichnung zu A 1.0 das Trapez $A_2 B_2 C_2 D$ für $\varphi = 40^\circ$ ein.

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Längen der Strecken $[DC_n]$ und $[SA_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{DC_n}(\varphi) = 3 \cdot \tan \varphi \text{ cm und } \overline{SA_n}(\varphi) = \frac{4}{\tan \varphi} \text{ cm.}$$

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{64}{\tan \varphi} - 27 \cdot \tan^2 \varphi \right) \text{ cm}^3$.

Lösung

Aufgabe A1.

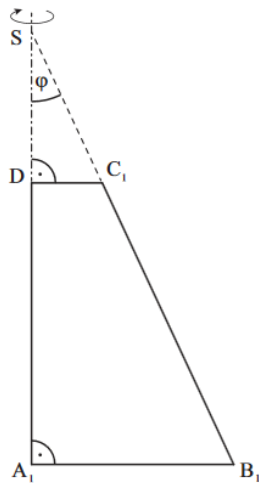
Trapeze $A_n B_n C_n D$ mit den parallelen Seiten $[DC_n]$ und $[A_n B_n]$ rotieren um die Gerade SD .

Es gilt:

$$A_n \in SD; \overline{SD} = 3 \text{ cm}; \overline{A_n B_n} = 4 \text{ cm}; \angle B_n A_n D = 90^\circ.$$

Die Winkel $DS C_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 53,13^\circ[$.

Die Zeichnung zeigt das Trapez $A_1 B_1 C_1 D$ für $\varphi = 25^\circ$.

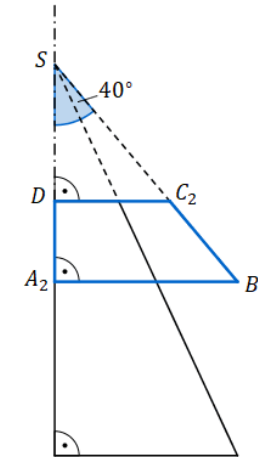


Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie in die Zeichnung zu A 1.0 das Trapez $A_2 B_2 C_2 D$ für $\varphi = 40^\circ$ ein.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Zeichnen des Trapezes $A_2 B_2 C_2 D$:

- 1) Antragen des Winkels $\varphi = 40^\circ$ an der Strecke $[SD]$
- 2) Antragen der Strecke $[A_2 B_2]$ mit $\overline{A_2 B_2} = 4 \text{ cm}$
- 3) Verlängern der Strecke $[DC_1]$ bis man auf den Schenkel des Winkel φ trifft

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Längen der Strecken $[DC_n]$ und $[SA_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

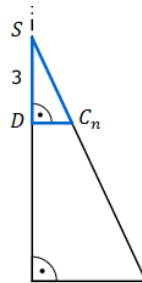
$$\overline{DC_n}(\varphi) = 3 \cdot \tan \varphi \text{ cm und } \overline{SA_n}(\varphi) = \frac{4}{\tan \varphi} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe A1.2**Länge einer Strecke**

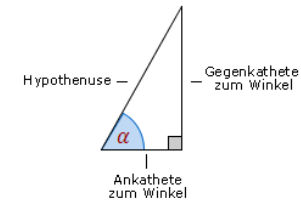
Gegeben: $\overline{SD} = 3 \text{ cm}$; $\overline{A_n B_n} = 4 \text{ cm}$

Gesucht: $\overline{DC_n}$ und $\overline{SA_n}$

Man betrachte die rechtwinkligen Dreiecke SDC_n :



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

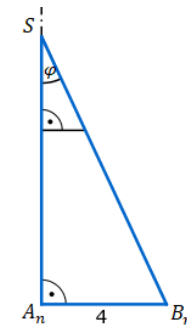
$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

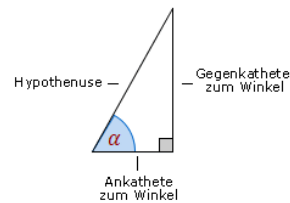
$$\tan \varphi = \frac{\overline{DC_n}}{3} \quad | \cdot 3$$

$$3 \cdot \tan \varphi = \overline{DC_n}$$

Nun betrachte man die rechtwinkligen Dreiecke $SA_n B_n$.



Erläuterung:

Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

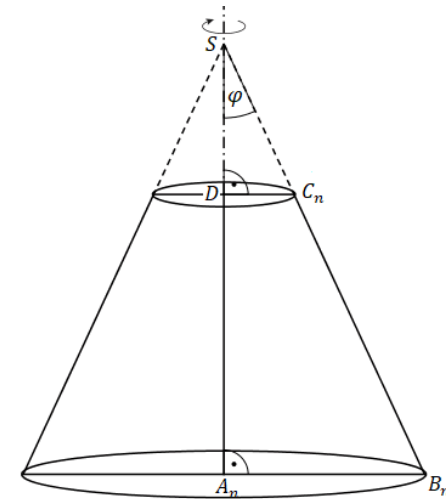
$$\tan \varphi = \frac{4}{\overline{SA_n}} \quad | \cdot \overline{SA_n}$$

$$\tan \varphi \cdot \overline{SA_n} = 4 \quad | : \tan \varphi$$

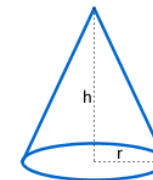
$$\overline{SA_n} = \frac{4}{\tan \varphi}$$

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)Bestätigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper inAbhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{64}{\tan \varphi} - 27 \cdot \tan^2 \varphi \right) \text{ cm}^3$.**Lösung zu Aufgabe A1.3****Volumen des Rotationskörpers ermitteln**

Die Rotation des Trapezes lässt einen kleinen und einen großen Kegel entstehen:



Berechnung der Volumina der beiden Kegel:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*Ein Kegel mit Radius r und Höhe h , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{gr. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{gr. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{A_n B_n}^2 \cdot \overline{SA_n}$$

$$V_{\text{gr. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\tan \varphi}$$

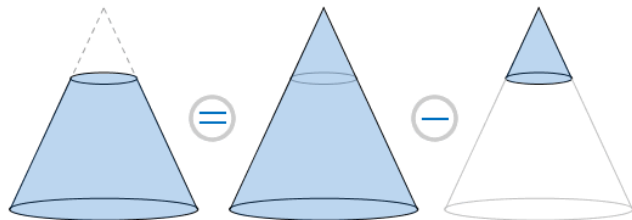
$$V_{\text{kl. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{kl. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{DC_n}^2 \cdot \overline{SD}$$

$$V_{\text{kl. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot \tan \varphi)^2 \cdot 3$$

Erläuterung: *Volumen eines Körpers*

Das Volumen des gesuchten Körpers entsteht, indem das Volumen des kleinen Kegels vom Volumen des großen Kegels abgezogen wird.



$$V_{\text{Rotationskörper}} = V_{\text{gr. Kegel}} - V_{\text{kl. Kegel}}$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\tan \varphi} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot \tan \varphi)^2 \cdot 3$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot \frac{4}{\tan \varphi} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot \tan^2 \varphi \cdot 3$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{64}{\tan \varphi} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 27 \cdot \tan^2 \varphi$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{64}{\tan \varphi} - 27 \cdot \tan^2 \varphi \right) \text{ cm}^2$$