Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

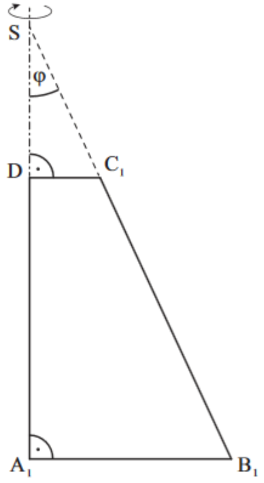
Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D$ mit den parallelen Seiten $[D\,C_n]$ und $[A_n\,B_n]$ rotieren um die Gerade $S\,D$.

Es gilt:

$A_n \in S\,D$; $\overline{S\,D} = 3$ cm; $\overline{A_n\,B_n} = 4$ cm; $\measuredangle B_n\,A_n\,D = 90°$.

Die Winkel $D\,S\,C_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in\,]0°; 53,13°[$.

Die Zeichnung zeigt das Trapez $A_1\,B_1\,C_1\,D$ für $\varphi = 25°$.



Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie in die Zeichnung zu A 1.0 das Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D$ für $\varphi = 40°$ ein.

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Längen der Strecken $[D\,C_n]$ und $[S\,A_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$\overline{D\,C_n}\ (\varphi) = 3 \cdot \tan\varphi$ cm und $\overline{S\,A_n}\ (\varphi) = \dfrac{4}{\tan\varphi}$ cm.

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V\ (\varphi) = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{64}{\tan\varphi} - 27 \cdot \tan^2\varphi\right)\ \text{cm}^3$.

Lösung

Aufgabe A1.

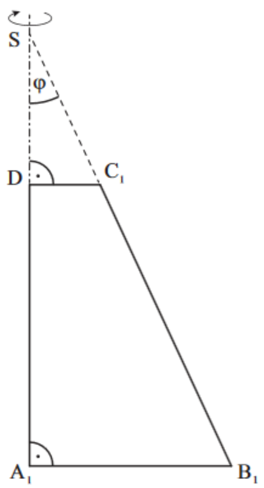
Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D$ mit den parallelen Seiten $[D\,C_n]$ und $[A_n\,B_n]$ rotieren um die Gerade $S\,D$.

Es gilt:

$A_n \in S\,D$; $\overline{S\,D} = 3$ cm; $\overline{A_n\,B_n} = 4$ cm; $\measuredangle B_n\,A_n\,D = 90°$.

Die Winkel $D\,S\,C_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in\,]0°; 53,13°[$.

Die Zeichnung zeigt das Trapez $A_1\,B_1\,C_1\,D$ für $\varphi = 25°$.

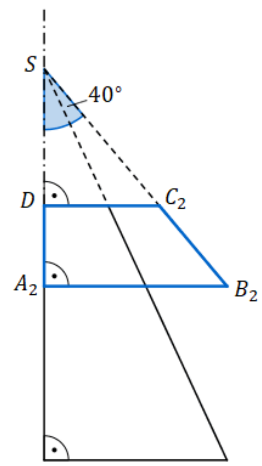


Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie in die Zeichnung zu A 1.0 das Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D$ für $\varphi = 40°$ ein.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Zeichnen des Trapezes $A_2\,B_2\,C_2\,D$:

1) Antragen des Winkels $\varphi = 40°$ an der Strecke $[S\,D]$
2) Antragen der Strecke $[A_2\,B_2]$ mit $\overline{A_2\,B_2} = 4$ cm
3) Verlängern der Strecke $[D\,C_1]$ bis man auf den Schenkel des Winkel φ trifft

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Längen der Strecken $[D\,C_n]$ und $[S\,A_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$\overline{D\,C_n}\ (\varphi) = 3 \cdot \tan\varphi$ cm und $\overline{S\,A_n}\ (\varphi) = \dfrac{4}{\tan\varphi}$ cm.

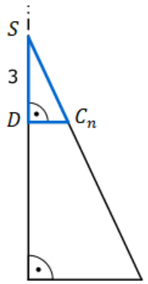
Lösung zu Aufgabe A1.2

Länge einer Strecke

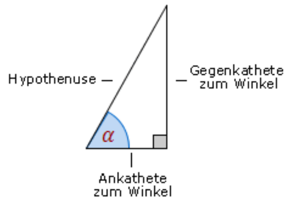
Gegeben: $\overline{S\,D} = 3$ cm; $\overline{A_n\,B_n} = 4$ cm

Gesucht: $\overline{D\,C_n}$ und $\overline{S\,A_n}$

Man betrachte die rechtwinkligen Dreiecke $S\,D\,C_n$:



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

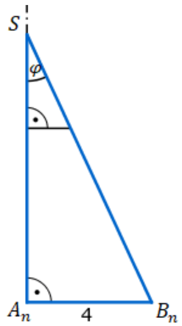
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

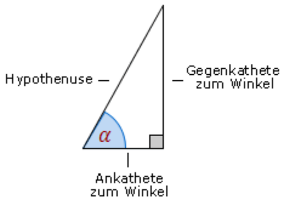
$$\tan\varphi = \frac{\overline{D\,C_n}}{3} \qquad |\cdot 3$$

$$3 \cdot \tan\varphi = \overline{D\,C_n}$$

Nun betrachte man die rechtwinkligen Dreiecke $S\,A_n\,B_n$.



Erläuterung:



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\varphi = \frac{4}{\overline{S\,A_n}} \qquad |\cdot \overline{S\,A_n}$$

$$\tan\varphi \cdot \overline{S\,A_n} = 4 \qquad |:\tan\varphi$$

$$\overline{S\,A_n} = \frac{4}{\tan\varphi}$$

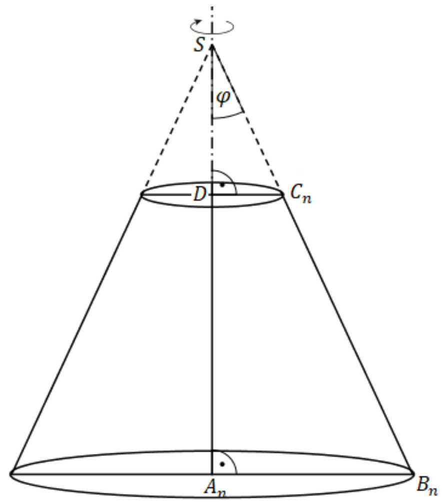
Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V\ (\varphi) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{64}{\tan\varphi} - 27\cdot\tan^2\varphi\right)\ \text{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe A1.3

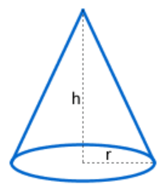
Volumen des Rotationskörpers ermitteln

Die Rotation des Trapezes lässt einen kleinen und einen großen Kegel entstehen:



Berechnung der Volumina der beiden Kegel:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

$$V_{\text{gr. Kegel}} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$$

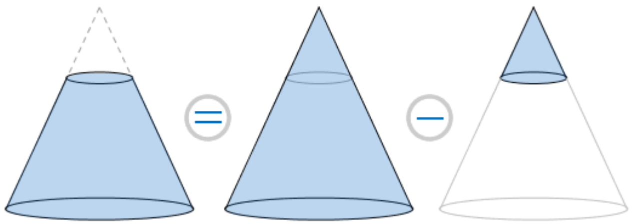
$$V_{\text{gr. Kegel}} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\overline{A_n\,B_n}^2\cdot\overline{S\,A_n}$$

$V_{\text{gr. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\tan\varphi}$

$V_{\text{kl. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V_{\text{kl. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{DC_n}^2 \cdot \overline{SD}$
$V_{\text{kl. Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot \tan\varphi)^2 \cdot 3$

Erläuterung: *Volumen eines Körpers*

Das Volumen des gesuchten Körpers entsteht, indem das Volumen des kleinen Kegels vom Volumen des großen Kegels abgezogen wird.



$V_{\text{Rotationskörper}} = V_{\text{gr. Kegel}} - V_{\text{kl. Kegel}}$
$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\tan\varphi} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot \tan\varphi)^2 \cdot 3$
$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot \frac{4}{\tan\varphi} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot \tan^2\varphi \cdot 3$
$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{64}{\tan\varphi} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 27 \cdot \tan^2\varphi$
$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{64}{\tan\varphi} - 27 \cdot \tan^2\varphi\right) \ \text{cm}^2$