

## Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A2

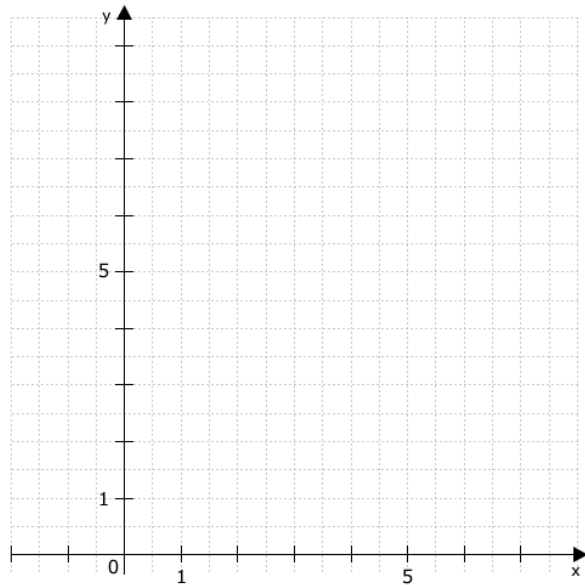
### Aufgabe A2.

Die Punkte  $A(-0,5|1)$  und  $B(3,5|1)$  legen zusammen mit Pfeilen  $\overrightarrow{AC_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix}$  für  $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ[$  Dreiecke  $ABC_n$  fest.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

#### Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile für  $\overrightarrow{AC_1}$  für  $\varphi = 40^\circ$  und  $\overrightarrow{AC_2}$  für  $\varphi = 80^\circ$ .  
Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke  $ABC_1$  und  $ABC_2$  in das Koordinatensystem ein.



#### Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $C_n \left( 8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$ .

#### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Trägergraphen der Punkte  $C_n$ .

#### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken  $ABC_n$  gibt es das gleichschenklige Dreieck  $ABC_3$  mit der Basis  $[AB]$ .

Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$  und begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck  $ABC_3$  nicht gleichseitig ist.

## Lösung

## Aufgabe A2.

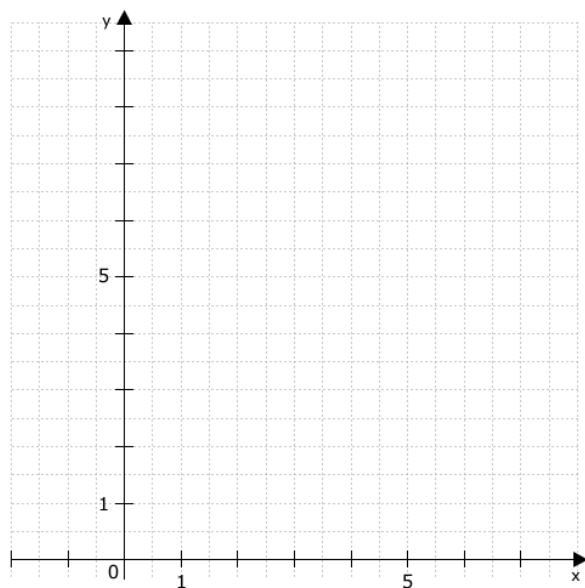
Die Punkte  $A(-0,5|1)$  und  $B(3,5|1)$  legen zusammen mit Pfeilen  $\overrightarrow{AC_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix}$

für  $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ[$  Dreiecke  $ABC_n$  fest.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

## Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile für  $\overrightarrow{AC_1}$  für  $\varphi = 40^\circ$  und  $\overrightarrow{AC_2}$  für  $\varphi = 80^\circ$ .  
Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke  $ABC_1$  und  $ABC_2$  in das Koordinatensystem ein.



## Lösung zu Aufgabe A2.1

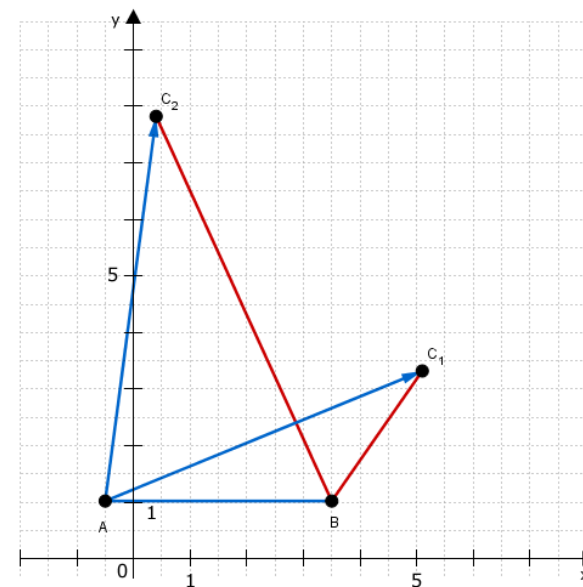
## Vektor bestimmen

Für  $\varphi = 40^\circ$  ergibt sich:

$$\overrightarrow{AC_n}(40^\circ) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos 40^\circ - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 40^\circ} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 2,3 \end{pmatrix}$$

Für  $\varphi = 80^\circ$  ergibt sich:

$$\overrightarrow{AC_n}(80^\circ) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos 80^\circ - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 80^\circ} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 6,8 \end{pmatrix}$$



Erläuterung: *Einzeichnen*

Anfertigung der Skizze:

- 1) Einzeichnen des Punktes  $A(-0, 5|1)$
- 2) Einzeichnen des Punktes  $B(3, 5|1)$
- 3) Antragen des Vektors  $\vec{AC}_1$ , um den Punkt  $C_1$  zu finden
- 4) Um den Punkt  $C_2$  zu finden, wird der Vektor  $\vec{AC}_2$  angetragen
- 5) Verbinden der Punkte zu Dreiecken  $ABC_1$  und  $ABC_2$

### Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $C_n \left( 8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$ .

### Lösung zu Aufgabe A2.2

#### Lage eines Punktes

$$\vec{AC}_n = \vec{C}_n - \vec{A} \quad | + \vec{A}$$

Erläuterung: *Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors  $\vec{AB}$  mit den Punkten  $A(x_A|y_A)$  und  $B(x_B|y_B)$  erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

In unserem Fall kann aus dem Vektor  $\vec{AC}_n$  der Fußpunkt des Vektors  $C_n$  berechnet werden.

$$\vec{C}_n = \vec{AC}_n + \vec{A}$$

$$\vec{C}_n = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0, 5 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0, 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 1 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \end{pmatrix}$$

Darstellung in Punktschreibweise:  $C_n \left( 8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Trägergraphen der Punkte  $C_n$ .

### Lösung zu Aufgabe A2.3

#### Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$\text{Gegeben: } C_n \left( 8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$$

Gesucht: Trägergraph

Erläuterung: *Trägergraphen*

Trägergraphen werden bestimmt, indem die Koordinaten der Punkte  $C_n$  unabhängig vom Winkel  $\varphi$  dargestellt werden.

Hierzu wird die  $x$ -Koordinate des Punktes  $C_n$  nach  $\cos \varphi$  aufgelöst und anschließend in der  $y$ -Koordinate  $\cos \varphi$  durch den berechneten Term ersetzt.

$$x' = 8 \cdot \cos \varphi - 1 \quad | + 1$$

$$x' + 1 = 8 \cdot \cos \varphi \quad | : 8$$

$$\frac{x' + 1}{8} = \cos \varphi$$

$y$ -Koordinate von  $C_n$ :

$$y' = \frac{1}{\cos \varphi} + 2$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x'+1}{8}} + 2$$

Erläuterung: *Doppelbruch*

Brüche der Form  $\frac{1}{\frac{a}{b}}$  können als  $\frac{b}{a}$  dargestellt werden.

$$\text{Denn } \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 : \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{8}{x+1} + 2$$

$$\Rightarrow t : y = \frac{8}{x+1} + 2$$

**Aufgabe A2.4** (3 Punkte)

Unter den Dreiecken  $ABC_n$  gibt es das gleichschenklige Dreieck  $ABC_3$  mit der Basis  $[AB]$ .

Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$  und begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck  $ABC_3$  nicht gleichseitig ist.

**Lösung zu Aufgabe A2.4****Winkel bestimmen**

Gegeben:  $A(-0,5|1)$ ,  $B(3,5|1)$  und  $C_n \left( 8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$   
 Gesucht:  $C_3$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke  $[AB]$  mit den Punkten  $A(x_A|y_A)$  und  $B(x_B|y_B)$  berechnet sich mit der Formel  $M_{[AB]} = \left( \frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ .

Da die Strecke  $[AB]$  Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $ABC_3$  muss  $x_{C_3}$  genau die Mitte der Strecke  $[AB]$  sein.

$$x_{C_3} = \frac{-0,5 + 3,5}{2} = 1,5$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da  $x_{C_3} = 1,5$  die Punkte  $C_n$  aber in Abhängigkeit von  $\varphi$  mit  $x_{C_n} = 8 \cdot \cos \varphi - 1$  berechnet werden, müssen die beiden Ausdrücke gleichgesetzt werden.

Es gilt:  $8 \cdot \cos \varphi - 1 = 1,5$

$$8 \cdot \cos \varphi - 1 = 1,5 \quad | + 1$$

$$8 \cdot \cos \varphi = 2,5 \quad | : 8$$

$$\cos \varphi = 0,3125$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0,3125) = 71,8^\circ$$

**Seite eines Dreiecks bestimmen**

Nun werden die Seitenlängen des Dreiecks  $ABC_3$  berechnet.

Gegeben:  $\overrightarrow{AC_n} = \left( 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right)$

$$|\overrightarrow{AB}| = x_B - x_A = 4 \text{ LE}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\overrightarrow{AC_3}$  ergibt sich, indem  $\varphi = 71,8^\circ$  in  $\overrightarrow{AC_n} = \left( 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right)$  eingesetzt wird.

$$\overrightarrow{AC_3} = \left( 8 \cdot \cos 71,8^\circ - 0,5 \mid \frac{1}{\cos 71,8^\circ} + 1 \right)$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge eines Vektors  $\vec{v}$  mit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  wird mit der folgenden Formel berechnet:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\overrightarrow{AC_3}| = \sqrt{(8 \cdot \cos 71,8^\circ - 0,5)^2 + \left( \frac{1}{\cos 71,8^\circ} + 1 \right)^2}$$

$$|\overrightarrow{AC_3}| = 4,7 \text{ LE}$$

Die Länge der Basis  $[AB]$  des gleichschenkligen Dreiecks ist also nicht längengleich zu der Länge des Schenkels  $[AC_3]$ , da  $4 \text{ LE} \neq 4,7 \text{ LE}$ .