Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A2

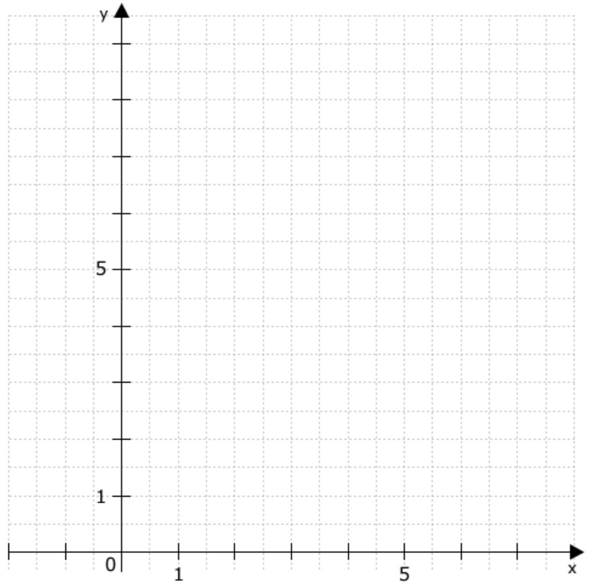
Aufgabe A2.

Die Punkte $A(-0,5|1)$ und $B(3,5|1)$ legen zusammen mit Pfeilen $\overrightarrow{AC_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos\varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos\varphi} + 1 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0°; 90°[$ Dreiecke ABC_n fest.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile für $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 40°$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 80°$.
Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 in das Koordinatensystem ein.



Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ gilt: $C_n\left(8 \cdot \cos\varphi - 1 \middle| \frac{1}{\cos\varphi} + 2\right)$.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Trägergraphen der Punkte C_n.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken ABC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck ABC_3 mit der Basis $[AB]$.
Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß φ und begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck ABC_3 nicht gleichseitig ist.

Lösung

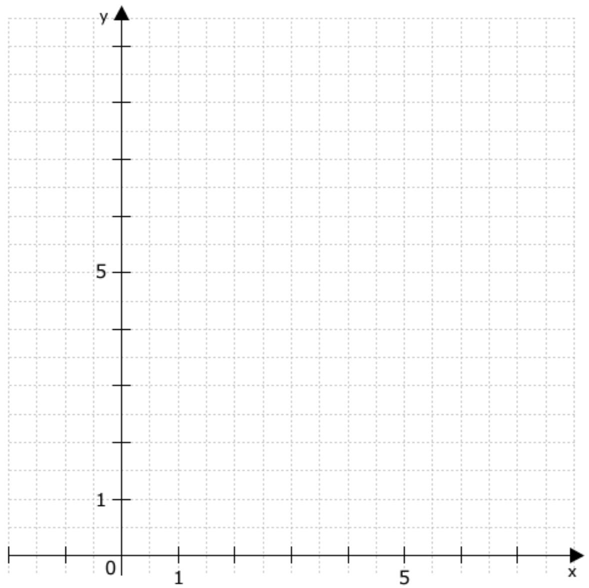
Aufgabe A2.

Die Punkte $A(-0,5|1)$ und $B(3,5|1)$ legen zusammen mit Pfeilen $\overrightarrow{A\,C_n}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos\varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos\varphi}+1 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0°; 90°[$ Dreiecke $A\,B\,C_n$ fest.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile für $\overrightarrow{A\,C_1}$ für $\varphi = 40°$ und $\overrightarrow{A\,C_2}$ für $\varphi = 80°$. Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke $A\,B\,C_1$ und $A\,B\,C_2$ in das Koordinatensystem ein.



Lösung zu Aufgabe A2.1

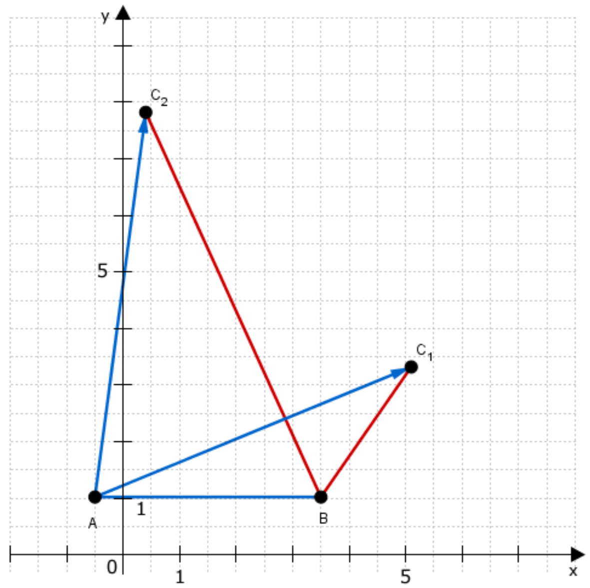
Vektor bestimmen

Für $\varphi = 40°$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{A\,C_n}\,(40°) = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos 40° - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 40°}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 2,3 \end{pmatrix}$$

Für $\varphi = 80°$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{A\,C_n}\,(80°) = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos 80° - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 80°}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 6,8 \end{pmatrix}$$



Erläuterung: *Einzeichnen*

Anfertigung der Skizze:

1) Einzeichnen des Punktes $A(-0,5|1)$
2) Einzeichnen des Punktes $B(3,5|1)$
3) Antragen des Vektors $\overrightarrow{AC_1}$, um den Punkt C_1 zu finden
4) Um den Punkt C_2 zu finden, wird der Vektor $\overrightarrow{AC_2}$ angetragen
5) Verbinden der Punkte zu Dreiecken ABC_1 und ABC_2

Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ gilt: $C_n\left(8\cdot\cos\varphi-1\middle|\frac{1}{\cos\varphi}+2\right)$.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Lage eines Punktes

$\overrightarrow{AC_n}=\overrightarrow{C_n}-\overrightarrow{A}\quad|+\overrightarrow{A}$

Erläuterung: *Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“ :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

In unserem Fall kann aus dem Vektor $\overrightarrow{AC_n}$ der Fußpunkt des Vektors C_n berechnet werden.

$\overrightarrow{C_n}=\overrightarrow{AC_n}+\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{C_n}=\begin{pmatrix}8\cdot\cos\varphi-0,5\\\frac{1}{\cos\varphi}+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0,5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot\cos\varphi-1\\\frac{1}{\cos\varphi}+2\end{pmatrix}$$

Darstellung in Punktschreibweise: $C_n\left(8\cdot\cos\varphi-1\middle|\frac{1}{\cos\varphi}+2\right)$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Trägergraphen der Punkte C_n.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $C_n\left(8\cdot\cos\varphi-1\middle|\frac{1}{\cos\varphi}+2\right)$

Gesucht: Trägergraph

Erläuterung: *Trägergraphen*

Trägergraphen werden bestimmt, indem die Koordinaten der Punkte C_n unabhängig vom Winkel φ dargestellt werden.

Hierzu wird die x- Koordindate Punktes C_n nach $\cos\varphi$ aufgelöst und anschließend in der y- Koordinate $\cos\varphi$ durch den berechneten Term ersetzt.

$x' = 8\cdot\cos\varphi-1\quad|+1$

$x'+1=8\cdot\cos\varphi\quad|:8$

$\frac{x'+1}{8}=\cos\varphi$

y-Koordinate von C_n:

$y'=\frac{1}{\cos\varphi}+2$

$y'=\frac{1}{\frac{x'+1}{8}}+2$

Erläuterung: *Doppelbruch*

Brüche der Form $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ können als $\frac{b}{a}$ dargestellt werden.

Denn $\frac{1}{\frac{a}{b}}=1:\frac{a}{b}=1\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$

$y' = \frac{8}{x'+1} + 2$

$\Rightarrow t: y = \frac{8}{x+1} + 2$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken ABC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck ABC_3 mit der Basis $[AB]$.
Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß φ und begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck ABC_3 nicht gleichseitig ist.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Winkel bestimmen

Gegeben: $A(-0,5|1)$, $B(3,5|1)$ und $C_n\left(8\cdot\cos\varphi - 1|\frac{1}{\cos\varphi}+2\right)$
Gesucht: C_3

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel $M_{[AB]} = \left(\frac{x_A+x_B}{2}|\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Da die Strecke $[AB]$ Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC_3 muss x_{C_3} genau die Mitte der Strecke $[AB]$ sein.

$x_{C_3} = \frac{-0,5+3,5}{2} = 1,5$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da $x_{C_3} = 1,5$ die Punkte C_n aber in Abhängigkeit von φ mit $x_{C_n} = 8\cdot\cos\varphi - 1$ berechnet werden, müssen die beiden Ausdrücke gleichgesetzt werden.

Es gilt: $8\cdot\cos\varphi - 1 = 1,5$

$8\cdot\cos\varphi - 1 = 1,5 \quad |+1$

$8\cdot\cos\varphi = 2,5 \quad |:8$

$\cos\varphi = 0,3125$

$\varphi = \cos^{-1}(0,3125) = 71,8°$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Nun werden die Seitenlängen des Dreiecks ABC_3 berechnet.

Gegeben: $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos\varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos\varphi}+1 \end{pmatrix}$
$|\overrightarrow{AB}| = x_B - x_A = 4$ LE

Erläuterung: *Einsetzen*

$\overrightarrow{AC_3}$ ergibt sich, indem $\varphi = 71,8°$ in $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos\varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos\varphi}+1 \end{pmatrix}$ eingesetzt wird.

$\overrightarrow{AC_3} = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos 71,8° - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 71,8°}+1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge eines Vektors $\overrightarrow{v}$ mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird mit der folgenden Formel berechnet:

$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|\overrightarrow{AC_3}| = \sqrt{(8\cdot\cos 71,8° - 0,5)^2 + (\frac{1}{\cos 71,8°}+1)^2}$

$|\overrightarrow{AC_3}| = 4,7$ LE

Die Länge der Basis $[AB]$ des gleichschenkligen Dreiecks ist also nicht längengleich zu der Länge des Schenkels $[AC_3]$, da $4 \text{ LE} \neq 4,7 \text{ LE}$.