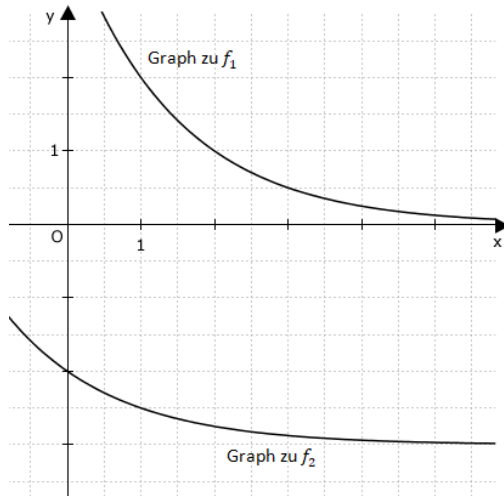


### Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A3

#### Aufgabe A3.

Gegeben sind die Funktionen  $f_1$  mit der Gleichung  $y = 4 \cdot 0,5^x$  und  $f_2$  mit der Gleichung  $y = 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$  ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

Punkte  $A_n(x | 4 \cdot 0,5^x)$  auf dem Graphen zu  $f_1$  und Punkte  $B_n(x | 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3)$  auf dem Graphen zu  $f_2$  haben dieselbe Abszisse  $x$ . Die Strecken  $[A_n B_n]$  sind für  $x \in \mathbb{R}$  die Basen von gleichschenkligen Dreiecken  $A_n B_n C_n$ . Für die Höhen  $[M_n C_n]$  der Dreiecke  $A_n B_n C_n$  gilt:  $\overline{M_n C_n} = 3$  LE.



#### Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  für  $x = 1$  in das Koordinatensystem ein.

#### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[A_n B_n]$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:  $\overline{A_n B_n}(x) = (3 \cdot 0,5^x + 3)$  LE.

#### Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Das Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  hat einen Flächeninhalt von 15 FE.

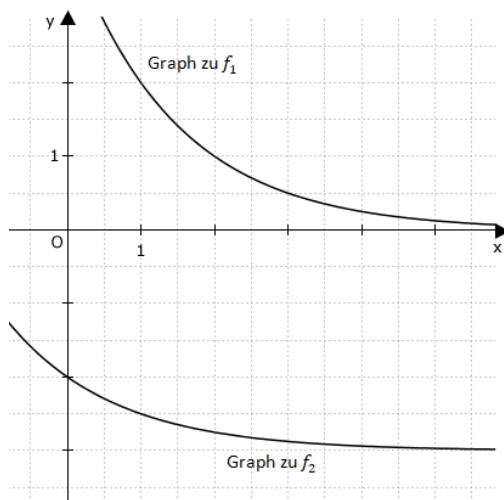
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für  $x$ .

## Lösung

## Aufgabe A3.

Gegeben sind die Funktionen  $f_1$  mit der Gleichung  $y = 4 \cdot 0,5^x$  und  $f_2$  mit der Gleichung  $y = 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$  ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

Punkte  $A_n$  ( $x|4 \cdot 0,5^x$ ) auf dem Graphen zu  $f_1$  und Punkte  $B_n$  ( $x|4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$ ) auf dem Graphen zu  $f_2$  haben dieselbe Abszisse  $x$ . Die Strecken  $[A_n B_n]$  sind für  $x \in \mathbb{R}$  die Basen von gleichschenkligen Dreiecken  $A_n B_n C_n$ . Für die Höhen  $[M_n C_n]$  der Dreiecke  $A_n B_n C_n$  gilt:  $\overline{M_n C_n} = 3$  LE.

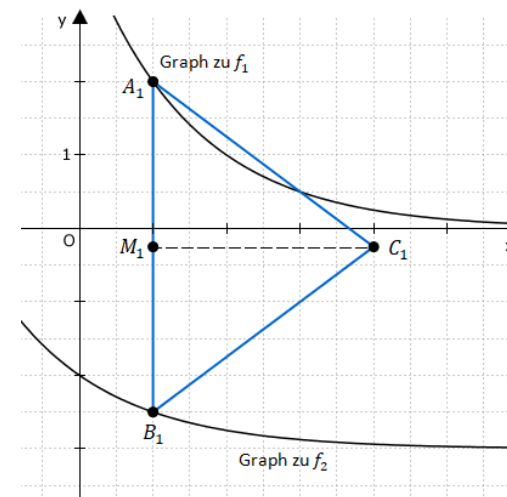


## Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  für  $x = 1$  in das Koordinatensystem ein.

Lösung zu Aufgabe A3.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Antragen des Punktes  $A_1$ , indem man auf der  $x$ - Achse zu  $x = 1$  geht und dann nach oben bis man auf den Graphen der Funktion  $f_1$  stößt.
- 2) Antragen des Punktes  $B_1$ , indem man auf der  $x$ - Achse zu  $x = 1$  geht und dann nach unten bis man auf den Graphen der Funktion  $f_2$  stößt.
- 3) Einzeichnen des Mittelpunktes  $M_1$  der Strecke  $[A_1 B_1]$ , indem die Länge  $\overline{A_1 B_1}$  misst und durch 2 teilt.
- 4) Einzeichnen der Höhe  $[M_1 C_1]$  mit  $\overline{M_1 C_1} = 3$  LE.
- 5) Verbinden der Punkte  $A_1, B_1$  und  $C_1$  zum Dreieck  $A_1 B_1 C_1$ .

## Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[A_n B_n]$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:  $\overline{A_n B_n}(x) = (3 \cdot 0,5^x + 3)$  LE.

Lösung zu Aufgabe A3.2

**Länge einer Strecke**

Gegeben:  $A_n (x|4 \cdot 0,5^x)$  und  $B_n (x|4 \cdot 0,5^{x+2} - 3)$

Gesucht:  $\overline{A_n B_n}(x)$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecken  $[A_n B_n]$  parallel zur  $y$ - Achse verlaufen, kann  $\overline{A_n B_n}$  berechnet werden, indem  $y_{A_n} - y_{B_n}$  berechnet wird.

Es gilt also:  $\overline{A_n B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$

$$\overline{A_n B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - (4 \cdot 0,5^{x+2} - 3)$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 4 \cdot 0,5^{x+2} + 3$$

Erläuterung: *Potenzregel*

Es gilt:  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$  für alle  $a \in \mathbb{R}$

In unserem Fall:  $0,5^{x+2} = 0,5^x \cdot 0,5^2$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 4 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^2 + 3$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 4 \cdot 0,5^x \cdot 0,25 + 3$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 1 \cdot 0,5^x + 3$$

$$\overline{A_n B_n} = 3 \cdot 0,5^x + 3$$

$$\Rightarrow \overline{A_n B_n}(x) = (3 \cdot 0,5^x + 3) \text{ LE}$$

**Aufgabe A3.3 (2 Punkte)**

Das Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  hat einen Flächeninhalt von 15 FE.  
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für  $x$ .

**Lösung zu Aufgabe A3.3****Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gegeben:  $\overline{A_n B_n} = (3 \cdot 0,5^x + 3)$  LE und  $\overline{M_n C_n} = 3$  LE

Gesucht: Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks  $A_2 B_2 C_2$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$h_a$  ist die zur (Grund-)Seite  $a$  zugehörige Höhe.

In unserem Fall ergibt sich somit der folgende Ansatz:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{M_n C_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{M_n C_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) \cdot 3$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da der Flächeninhalt  $A_{A_2 B_2 C_2} = 15$  FE beträgt, gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) \cdot 3 = 15$$

Anschließend wird nach  $x$  aufgelöst.

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) \cdot 3 = 15 | : 3$$

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) = 5 | \cdot 2$$

$$3 \cdot 0,5^x + 3 = 10 | - 3$$

$$3 \cdot 0,5^x = 7 | : 3$$

$$0,5^x = \frac{7}{3} \quad | \log_{0,5}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion  $0,5^x$  kann durch den Logarithmus  $\log 0,5$  aufgehoben werden.

Beispiel:  $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$$x = \log_{0,5} \frac{7}{3}$$

$$x \approx -1,22$$