Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_1 für $x \in [1,5; 11]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-6 \leq y \leq 6$

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v}$ auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) abgebildet.
Geben Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [1,5; 11]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Punkte $A_n \left(x|1,5 \cdot \log_{0,5} x\right)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte $C_n \left(x|-1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)\right)$ auf dem Graphen zu f_1. Sie sind für $x > 1,62$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.
Es gilt: $\overline{B_n\,D_n} = 6$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2,5$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 8,5$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.
Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken $[A_n\,C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n\,C_n}\ (x) = -1,5 \cdot \log_{0,5}\left(x^2 - x\right)$ LE.

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Die Raute $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ ist ein Quadrat. Berechnen Sie die zugehörige x -Koordinate des Punktes A_3. Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalenschnittpunkte M_n der Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$M_n \left(x|0,75 \cdot \log 0,5 \left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$.

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n der Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n an.

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_1 für $x \in [1,5; 11]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-6 \leq y \leq 6$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsbereich bestimmen

$f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ ist nur für postive Werte definiert.
Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x - 1 > 0$.

$x - 1 > 0 \quad | +1$

$x > 1$

$\Rightarrow \mathbb{D} =]1; \infty[$

Wertemenge einer Funktion

Die Wertemenge jeder Logarithmusfunktion besteht aus allen reellen Zahlen.

$\Rightarrow \mathbb{W}_f = \mathbb{R}$

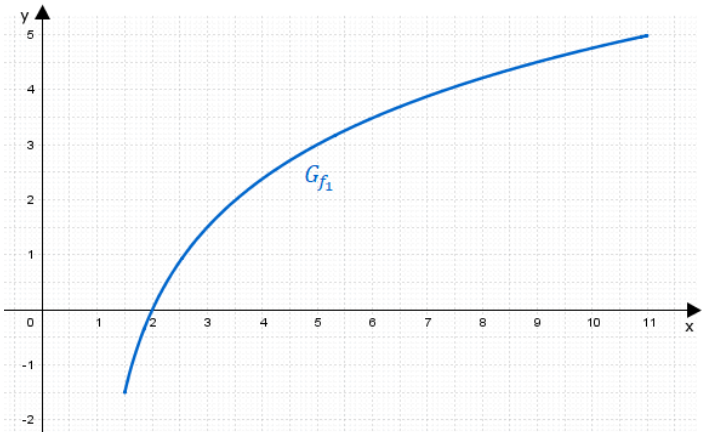
Skizze

$f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ wird für $x \in [1,5; 11]$ in ein Koordinatensystem gezeichnet.

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Erstellen einer Werteballe mit Hilfe des Taschenrechners für $x \in [1,5; 11]$

2) Einzeichnen der Punkte und verbinden der Punkte zum Graphen der Funktion f_1



Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v}$ auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) abgebildet.
Geben Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [1,5; 11]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Vektor bestimmen

Gegeben: $f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ und $f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$

Gesucht: $\overrightarrow{v}$

Das Nachvollziehen des Übergangs der Funktion $f_1(x)$ auf die Funtkion $f_2(x)$ liefert den Verschiebungsvektor $\overrightarrow{v}$.

Erläuterung: *Spiegelung von Funktionsgraphen, Verschiebung von Funktionsgraphen*

Wird die Funktion $f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ an der x- Achse gespiegelt, so gilt:

$f^*(x) = -1 \cdot f_1(x) = -1 \cdot \big(-1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)\big) = 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$

Eine Vektorverschiebung der Funktion $f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ um den Vektor $\overrightarrow{v} = \binom{a}{b}$ würde folgende Funktion ergeben:

$f'(x) = 1,5 \cdot \log_{0,5}(x+a) + b$

Durch Vergleich der Funktionen $f^*(x)$ und $f'(x)$ lässt sich erkennen, dass $a = -1$ und $b = 0$.
Somit lautet der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

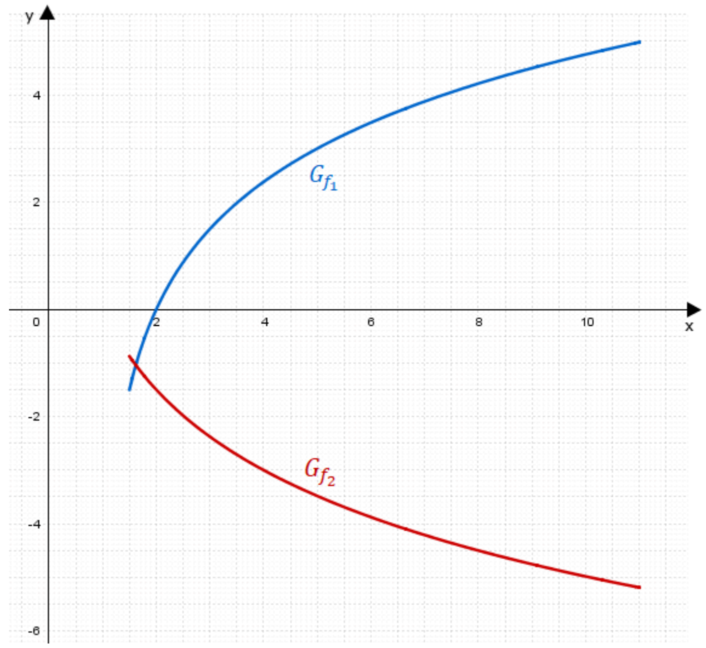
Skizze

$f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ wird ebenfalls für $x \in [1,5; 11]$ in ein Koordinatensystem gezeichnet.

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Erstellen einer Werteballe mit Hilfe des Taschenrechners für $x \in [1,5; 11]$

2) Einzeichnen der Punkte und verbinden der Punkte zum Graphen der Funktion f_2

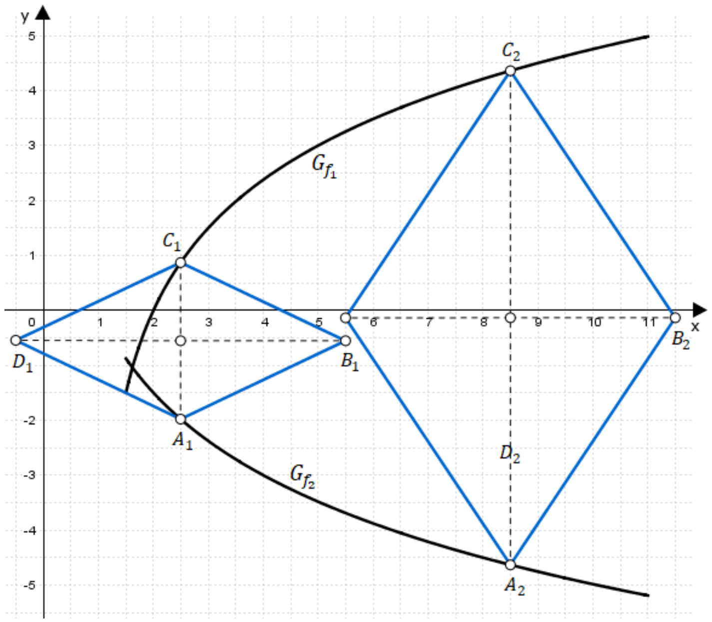


Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Punkte $A_n\ \big(x|1,5 \cdot \log_{0,5} x\big)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte $C_n\ \big(x|-1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)\big)$ auf dem Graphen zu f_1. Sie sind für $x > 1,62$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.
Es gilt: $\overline{B_n\,D_n} = 6$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2,5$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 8,5$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.
Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken $[A_n\,C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n\,C_n}\ (x) = -1,5 \cdot \log_{0,5}\ \big(x^2 - x\big)$ LE.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) man geht auf der x-Achse zu $x = 2,5$ und dann nach oben bis man auf den Graphen der Funktion f_1 stößt. Hier liegt der Punkt C_1.

2) man geht auf der x-Achse zu $x = 2,5$ und dann nach unten bis man auf den Graphen der Funktion f_2 stößt. Hier liegt der Punkt A_1.

3) Vom Mittelpunkt der Strecke $[A_1 C_1]$ gehe man 3 LE nach rechts und links. Hier befinden sich die Punkte B_1 undD_1.

Konstruktion der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ erfolgt analog.

Länge einer Strecke

Die Strecken $[A_n C_n]$ verlaufen parallel zur y- Achse. Es gilt:

$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1) - 1,5 \cdot \log_{0,5} x$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $-1,5$ wird ausgeklammert.

$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \left(\log_{0,5}(x-1) + 1,5 \cdot \log_{0,5} x\right)$

Erläuterung: *Logarithmus einer Summe*

$\log_a s + \log_a t = \log_a (s \cdot t)$

$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \left(\log_{0,5}(x-1) \cdot x\right)$

$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \left(\log_{0,5}(x^2 - x)\right)$

$\Rightarrow \quad \overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x)$ LE

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Die Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ ist ein Quadrat. Berechnen Sie die zugehörige x -Koordinate des Punktes A_3. Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE und $\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x)$ LE

Gesucht: $\overline{A_3 C_3}$

Erläuterung: *Eigenschaften eines Quadrats*

In einem Quadrat sind die Längen der Diagonalen gleich lang.

In unserem Fall gilt also:

$\overline{B_3 D_3} = \overline{A_3 C_3}$ und somit $\overline{A_3 C_3} = 6$ LE.

$-1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) = 6 | : (-1,5)$

$\log_{0,5}(x^2 - x) = -4 \quad |\text{entlogarithmieren}$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_{0,5}$ kann durch die Exponentialfunktion $0,5^x$ aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_{0,5} x = 1 \iff 0,5^{\log_{0,5} x} = 0,5^1 \iff x = 0,5$

$x^2 - x = 0,5^{-4}$
$x^2 - x = 16 \qquad | - 16$
$x^2 - x - 16 = 0 \qquad |$ Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$x_1 \approx 4,53$ und $(x_2 \approx -3,53)$ da $x > 1,62$

$\Rightarrow x_{A_3} = 4,53$

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalenschnittpunkte M_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$M_n \left(x | 0,75 \cdot \log 0,5 \left(\frac{x}{x-1}\right)\right).$$

Lösung zu Aufgabe B1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n \left(x | 1,5 \cdot \log_{0,5} x\right)$ und $C_n \left(x | -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)\right)$

Gesucht: Diagnoalenschnittpunte M_n

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[A\,B]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel:

$$M_{[A\,B]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} | \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$M_n = \left(\frac{x + x}{2} | \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2}\right)$$
$$M_n = \left(\frac{2x}{2} | \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2}\right)$$

$$M_n = \left(x | \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2}\right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Da im Term $1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ in beiden Summanden der Faktor $1,5$ vorkommt, wird er ausgeklammert. Somit gilt:

$1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5} = 1,5 \cdot \left(\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1)\right)$

$$M_n = \left(x | \frac{1,5 \cdot \left(\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1)\right)}{2}\right)$$
$$M_n = \left(x | 0,75 \cdot \left(\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1)\right)\right)$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

Eine Differenz von Logarithmen gleicher Basis kann auch als Logarithmus des Quotienten der Argumente ausgedrückt werden.

Beispiel:

$\log(3) - \log(4) = \log\left(\frac{3}{4}\right) = -0,125$

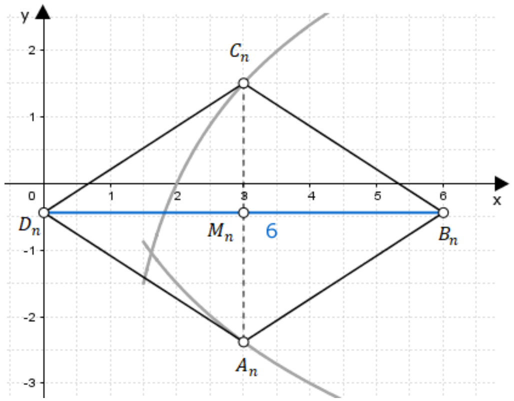
$$M_n = \left(x \middle| 0,75 \cdot \log_{0,5} \frac{x}{x-1}\right)$$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n der Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n an.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen



Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit der Abszisse x der Punkte A_n bestimmen:

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Da die Punkte M_n die Mittelpunkte der Strecke $[B_n\,D_n]$ sind und $\overline{B_n\,D_n} = 6$ LE gilt:

$x_D = x_M - 3$

Da der Punkt M_n die selbe x- Koordinate besitzt wie der Punkt A_n, gilt wiederum:

$x_D = x_A - 3$

$x_D = x_A - 3$

Für die y- Koordinate des Punktes D_n gilt: $\quad y_D = 0,75 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x_A}{x_A - 1}\right)$

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Die Punkte D_n haben die selbe y- Koordinate wie die Punkte M_n, da die Strecke $[B_n\,D_n]$ parallel zur x- Achse verläuft.

Die Punkte D_n haben also die folgenden Koordinaten: $\quad D_n\left(x_A - 3 \middle| 0,75 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x_A}{x_A - 1}\right)\right)$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x-Koordinate $x_A - 3$ von D_n wird nach x_A aufgelöst.
Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von D_n eingesetzt.

$x^* = x_A - 3 \quad | + 3$
$x^* + 3 = x_A$

$$y_D = 0,75 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x_A}{x_A - 1}\right)$$
$$y^* = 0,75 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x^* + 3}{(x^* + 3) - 1}\right)$$
$$y^* = 0,75 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x^* + 3}{x^* + 2}\right)$$

Somit hat der Trägergraph die Gleichung $y = 0,75 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$.