

Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ des Drachenvierecks $ABCD$ schneiden sich im Punkt K . Das Drachenviereck $ABCD$ ist die Grundfläche des geraden Prismas $ABCDEF GH$. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A .

Es gilt:

$$\overline{AC} = 12 \text{ cm}; \overline{BD} = 10 \text{ cm}; \overline{AK} = 4 \text{ cm}; \overline{AE} = 6 \text{ cm}.$$

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEF GH$, wobei $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung: $p = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$

Die Strecken $[EG]$ und $[FH]$ schneiden sich im Punkt L .

Berechnen Sie das Maß des Winkels LCK . [Ergebnis: $\angle LCK = 36,87^\circ$]

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[LC]$. Die Winkel CKP_n haben das Maß mit $\varphi \in]0^\circ, 90^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte gleichschenkliger Dreiecke BDP_n mit der Basis $[BD]$.

Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 sowie die Strecke $[KP_1]$ für $\varphi = 78^\circ$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Begründen Sie sodann, dass keines der Dreiecke BDP_n gleichseitig ist.

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[KP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{KP_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}.$$

Die Länge der Strecke $[KP_0]$ ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für φ an.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$ mit der Grundfläche $ABCD$ und den Höhen $[P_nQ_n]$. Die Punkte Q_n liegen auf der Strecke $[KC]$.

Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDP_1$ und die Höhe $[P_1Q_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$\left[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3 \right]$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_2$ beträgt 96 cm^3 .

Berechnen Sie das zugehörige Maß für φ .

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Volumina der Pyramiden $ABDP_n$ mit der Grundfläche ABD und der Pyramiden $BCDP_n$ mit der Grundfläche BCD stets im Verhältnis $1 : 2$ stehen.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ des Drachenvierecks $ABCD$ schneiden sich im Punkt K . Das Drachenviereck $ABCD$ ist die Grundfläche des geraden Prismas $ABCDEFGH$. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A .

Es gilt:

$$\overline{AC} = 12 \text{ cm}; \overline{BD} = 10 \text{ cm}; \overline{AK} = 4 \text{ cm}; \overline{AE} = 6 \text{ cm}.$$

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung: $p = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$

Die Strecken $[EG]$ und $[FH]$ schneiden sich im Punkt L .

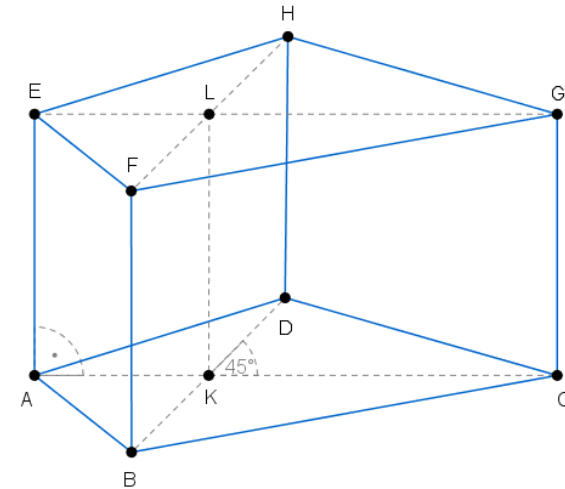
Berechnen Sie das Maß des Winkels LCK . [Ergebnis: $\angle LCK = 36,87^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Gegeben: $\overline{AC} = 12 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$; $\overline{AK} = 4 \text{ cm}$; $\overline{AE} = 6 \text{ cm}$

Einzeichnen des Prismas $ABCDEFGH$



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) $[AC]$ mit $\overline{AC} = 12 \text{ cm}$ einzeichnen.
- 2) Punkt K mit $\overline{AK} = 4 \text{ cm}$ antragen.
- 3) $[BD]$ durch den Punkt K im Winkel von 45° einzeichnen.
Für die Zeichnung: $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$
- 4) Drachen $ABCD$ verbinden.
- 5) $[AE]$ mit $\overline{AE} = 6 \text{ cm}$ einzeichnen.
- 6) Weitere Kanten $[BF]$, $[CG]$ und $[DH]$ mit Höhe von 6 cm einzeichnen.
- 7) Deckfläche und Prisma verbinden.
- 8) Diagonalen $[FH]$ und $[EG]$ einzeichnen und den Diagonalschnittpunkt L benennen.

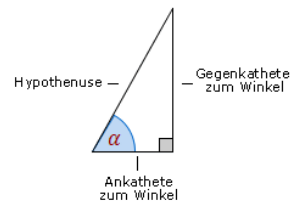
Winkel bestimmen

Man betrachte das rechtwinklige Dreieck KCL .

Gegeben: $\overline{KL} = 6 \text{ cm}$ und $\overline{KC} = \overline{AC} - \overline{AK} = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$

Gesucht: $\angle LCK$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle LCK = \frac{\overline{KL}}{\overline{KC}}$$

$$\tan \angle LCK = \frac{6}{8} \quad | \tan^{-1}$$

$$\angle LCK = 36,87^\circ$$

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[LC]$. Die Winkel $\angle CKP_n$ haben das Maß mit $\varphi \in]0^\circ, 90^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte gleichschenkliger Dreiecke BDP_n mit der Basis $[BD]$.

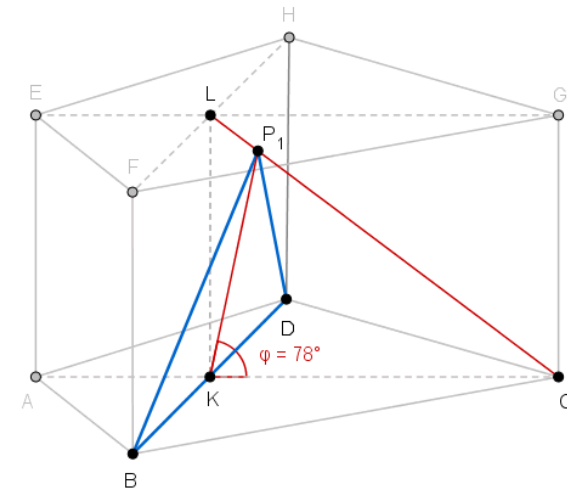
Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 sowie die Strecke $[KP_1]$ für $\varphi = 78^\circ$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Begründen Sie sodann, dass keines der Dreiecke BDP_n gleichseitig ist.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

Einzeichnen des Dreiecks BDP_1 sowie der Strecke $[KP_1]$:



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Antragen des Winkels $\varphi = 78^\circ$ am Punkt K .
- 2) Einzeichnen des Punktes P_1 . Der Punkt P_1 ergibt sich als Schnittpunkt des Schenkels des Winkel φ und der der Strecke $[LC]$.
- 3) Verbinden der Punkte D , B und P_1 zum Dreieck DBP_1 .
- 4) Einzeichnen der Strecke $[KP_1]$.

Länge einer Strecke

Begründung, dass keines der Dreiecke BDP_n gleichseitig ist.

Gegeben: $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$ (Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks)

Falls eines der Dreiecke gleichseitig wäre dann müsste die Höhe $h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 8,66 \text{ cm}$ betragen.

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet man mit folgender Formel:

$$h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

In unserem Fall ist die Länge der Basis $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$.

$$\text{Damit ergibt sich } h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

Da die Punkte $P_n \in [LC]$ gilt: $\overline{K P_{max}} < 8 \text{ cm}$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Punkte P_n hätten den größten Abstand vom Punkt K wenn sie mit dem Punkt C zusammenfallen. Da $\overline{KC} = 8 \text{ cm}$ ist aber $\varphi \neq 0^\circ$ folgt also $\overline{K P_{max}} < 8 \text{ cm}$.

$$\overline{K P_{max}} = 8 \text{ cm} \neq h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 8,66 \text{ cm}$$

\Rightarrow die Dreiecke BDP_n sind nicht gleichseitig

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[K P_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{K P_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm.}$$

Die Länge der Strecke $[K P_0]$ ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für φ an.

Lösung zu Aufgabe B2.3

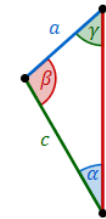
Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{KC} = 8 \text{ cm}$ und $\angle LCK = 36,87^\circ$

Gesucht: $\overline{K P_n}(\varphi)$

Man betrachte das Dreieck $K C P_n$.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\text{Im Dreieck } K C P_n \text{ gilt somit: } \frac{\overline{K P_n}}{\overline{KC}} = \frac{\sin \angle LCK}{\sin \angle K P_n C}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{K P_n}}{\overline{KC}} &= \frac{\sin \angle LCK}{\sin \angle K P_n C} \\ \frac{\overline{K P_n}}{8} &= \frac{\sin 36,87^\circ}{\sin (180^\circ - (\varphi + 36,87^\circ))} \quad | \cdot 8 \\ \overline{K P_n} &= \frac{8 \cdot \sin 36,87^\circ}{\sin (180^\circ - (\varphi + 36,87^\circ))} \\ \overline{K P_n} &= \frac{4,80}{\sin (180^\circ - (\varphi + 36,87^\circ))} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{Hier: } \sin\left(180^\circ - \underbrace{(\varphi + 36,87^\circ)}_{\alpha}\right) = \sin(\varphi + 36,87^\circ)$$

$$\overline{K P_n} = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}$$

Nun soll der Winkel φ angegeben werden, für den die Strecke $[K P_0]$ minimal ist.

$$\text{Gegeben: } \overline{K P_n} = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}$$

Erläuterung:

Die Strecke $\overline{K P_n}$ besteht aus einem Quotienten. Ein Quotient wird minimal, wenn der Nenner maximal wird.

Hier muss also der Quotient $\frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)}$ den kleinstmöglichen Wert annehmen. Dies ist der Fall, wenn der Sinus im Nenner maximal wird. Der größte Wert den der Sinus annehmen kann ist 1. Dies ist der Fall für $+90^\circ$.

$$90^\circ = \varphi_0 + 36,87^\circ \quad | - 36,87$$

$$\varphi_0 = 53,13^\circ$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCD P_n$ mit der Grundfläche $ABCD$ und den Höhen $[P_n Q_n]$. Die Punkte Q_n liegen auf der Strecke $[K C]$.

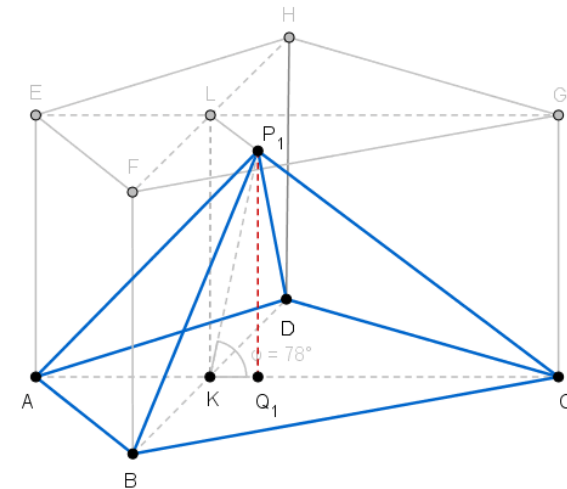
Zeichnen Sie die Pyramide $ABCD P_1$ und die Höhe $[P_1 Q_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen V der Pyramiden $ABCD P_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$\left[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3 \right]$$

Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze



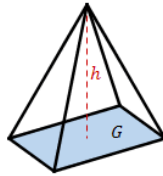
Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Verbinden der Punkte P_1 und A zur Strecke $[P_1 A]$
- 2) Einzeichnen der Höhe $[P_1 Q_1]$ indem vom Punkt P_1 das Lot zur Strecke $[K C]$ gefällt wird.

Volumen einer Pyramide

$$\text{Gegeben: } \overline{AC} = 12 \text{ cm, } \overline{BD} = 10 \text{ cm und } \overline{K P_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Drachenvierecks*

Ein Drachenviereck mit den Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Grundfläche G ist das Drachenviereck $ABCD$.

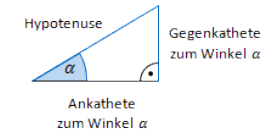
$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot h$$

$h = \overline{P_n Q_n}$. Zur Berechnung der Streckenlänge $\overline{P_n Q_n}$ betrachtet man das Dreieck $K P_n Q_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \varphi = \frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{K P_n}} \quad | \cdot \overline{K P_n}$$

$$\overline{P_n Q_n} = \sin \varphi \cdot \overline{K P_n}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin \varphi \cdot \overline{K P_n}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_2$ beträgt 96 cm^3 . Berechnen Sie das zugehörige Maß für φ .

Lösung zu Aufgabe B2.5

Winkel bestimmen

$$\text{Gegeben: } V = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3$$

Somit gilt für das Volumen der Pyramide $ABCDP_2$:

$$\frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} = 96 \mid : 96$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} = 1 \mid \cdot \sin(\varphi + 36,87^\circ)$$

$$\sin(\varphi + 36,87^\circ) = \sin \varphi \mid \text{Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \varphi \cdot \cos 36,87^\circ + \cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ = \sin \varphi \mid - \cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ$$

$$\sin \varphi \cdot \cos 36,87^\circ = \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ \mid - \sin$$

$$\sin \varphi \cdot \cos 36,87^\circ - \sin \varphi = -\cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ \mid \text{Ausklammern}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der gemeinsame Term $\sin \varphi$ wird auf der linken Seite der Gleichung ausgeklammert.

$$\sin \varphi \cdot (\cos 36,87^\circ - 1) = -\cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ$$

$$\sin \varphi \cdot (\cos 36,87^\circ - 1) = -\cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ \mid : \cos \varphi$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} (\cos 36,87^\circ - 1) = -\sin 36,87^\circ \mid : (\cos 36,87^\circ - 1)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-\sin 36,87^\circ}{(\cos 36,87^\circ - 1)} \mid \text{Tangens anwenden}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi = \frac{-\sin 36,87^\circ}{(\cos 36,87^\circ - 1)} \mid \tan^{-1} \varphi$$

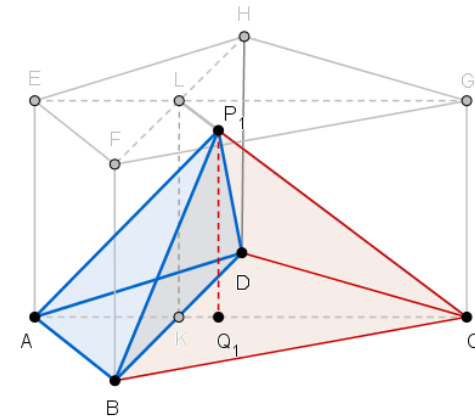
$$\varphi = 71,57^\circ$$

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Volumina der Pyramiden $ABDP_n$ mit der Grundfläche ABD und der Pyramiden $BCDP_n$ mit der Grundfläche BCD stets im Verhältnis 1 : 2 stehen.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Volumen der Teilkörper



Gegeben: $\overline{BD} = 10$ cm, $\overline{AK} = 4$ cm und $\overline{KC} = 8$ cm

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Pyramide V_{ABDP_n} und die Pyramide V_{BCDP_n} haben jeweils dieselbe Höhe h .

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{G_1}{G_2}$$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AK}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{KC}}$$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8}$$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{1}{2}$$