

Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik II Aufgabe A2

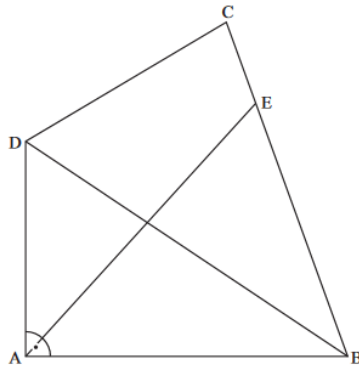
Aufgabe A2.

Die Zeichnung zeigt das Viereck ABCD.

Es gilt:

$$\overline{AB} = 7,8 \text{ cm}; \overline{AD} = 5,2 \text{ cm}; \overline{BC} = 8,6 \text{ cm}$$

$$\angle BAD = 90^\circ; \angle CBA = 70^\circ$$



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Diagonalen $[\overline{BD}]$ und den Flächeninhalt A des Dreiecks BCD.
[Ergebnisse: $\overline{BD} = 9,4 \text{ cm}$; $A = 23,9 \text{ cm}^2$]

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Der Punkt E liegt auf der Strecke $[BC]$. Die Dreiecke ABE und BCD besitzen den gleichen Flächeninhalt.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[\overline{AE}]$.

[Teilergebnis: $BE = 6,5 \text{ cm}$; Ergebnis: $AE = 8,3 \text{ cm}$]

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Kreis um E mit dem Radius 3 cm schneidet die Strecke $[\overline{AE}]$ im Punkt P und die Strecke $[\overline{BE}]$ im Punkt Q .

Zeichnen Sie den Kreisbogen \widehat{PQ} in die Zeichnung zu A 2.0 ein.

Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken $[\overline{QE}]$, $[\overline{EP}]$ und den Kreisbogen \widehat{PQ} begrenzt wird.

Lösung

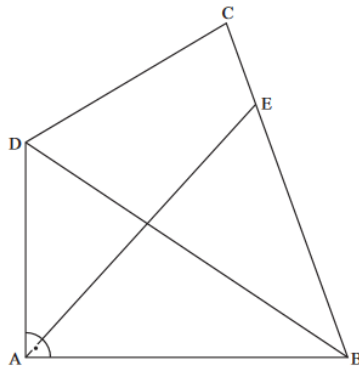
Aufgabe A2.

Die Zeichnung zeigt das Viereck ABCD.

Es gilt:

$$\overline{AB} = 7,8 \text{ cm}; \overline{AD} = 5,2 \text{ cm}; \overline{BC} = 8,6 \text{ cm}$$

$$\angle BAD = 90^\circ; \angle CBA = 70^\circ$$



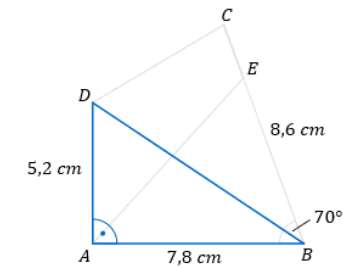
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Diagonalen $[\overline{BD}]$ und den Flächeninhalt A des Dreiecks BCD.
[Ergebnisse: $\overline{BD} = 9,4 \text{ cm}$; $A = 23,9 \text{ cm}^2$]

Lösung zu Aufgabe A2.1

Länge einer Strecke



Gegeben: $\overline{AB} = 7,8 \text{ cm}$; $\overline{AD} = 5,2 \text{ cm}$

Gesucht: \overline{BD}

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

In diesem Fall ist $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$ und $c = \overline{BD}$.

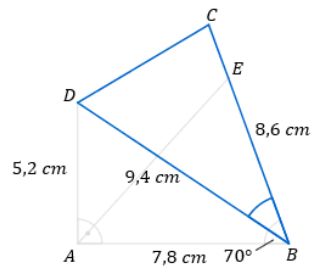
$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$$

$$\overline{BD}^2 = 7,8^2 + 5,2^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{7,8^2 + 5,2^2}$$

$$\overline{BD} = 9,4 \text{ cm}$$

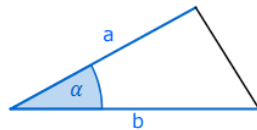
Flächeninhalt eines Dreiecks



Gegeben: $\overline{BD} = 9,4 \text{ cm}$ und $\overline{BC} = 8,6 \text{ cm}$

Gesucht: Flächeninhalt des Dreiecks BCD

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

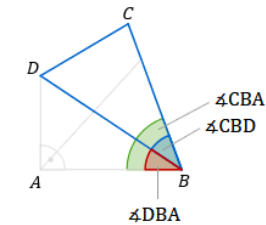
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle CBD$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 8,6 \cdot \sin \angle CBD$$

Nun muss noch der Winkel $\angle CBD$ berechnet werden.

Erläuterung: *Erläuterung*

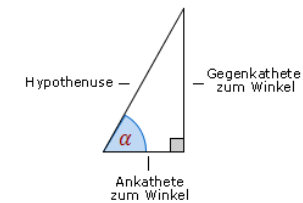


$$\angle CBD = \angle CBA - \angle DBA$$

Zunächst muss also der Winkel $\angle DBA$ berechnet werden.

Berechnung des Winkels $\angle DBA$:

Erläuterung:



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle DBA = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\tan \angle DBA = \frac{5,2}{7,8}$$

$$\Rightarrow \angle DBA = 33,7^\circ$$

Somit ergibt sich für den Winkel $\angle CBD$:

$$\angle CBD = \angle CBA - \angle DBA$$

$$\angle CBD = 70^\circ - 33,7^\circ$$

$$\angle CBD = 36,3^\circ$$

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks BCD:

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 8,6 \cdot \sin \angle CBD$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 8,6 \cdot \sin 36,3^\circ$$

$$A_{BCD} = 23,9 \text{ cm}^2$$

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

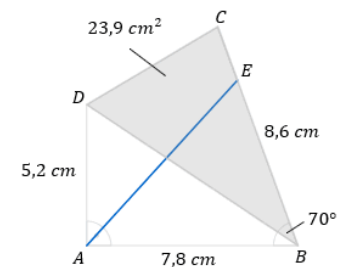
Der Punkt E liegt auf der Strecke $[BC]$. Die Dreiecke ABE und BCD besitzen den gleichen Flächeninhalt.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AE]$.

[Teilergebnis: $\overline{BE} = 6,5 \text{ cm}$; Ergebnis: $\overline{AE} = 8,3 \text{ cm}$]

Lösung zu Aufgabe A2.2

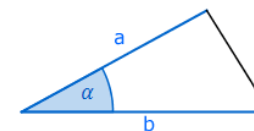
Länge einer Strecke



Gegeben: $\overline{AB} = 7,8 \text{ cm}$, $\angle EBA = 70^\circ$ und $A_{BCD} = 23,9 \text{ cm}^2$

Gesucht: \overline{AE}

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \sin \angle EBA$$

$$A_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \overline{BE} \cdot \sin 70^\circ$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da $A_{BCD} = A_{ABE}$ ist $A_{ABE} = 23,9 \text{ cm}^2$.

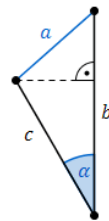
$$23,9 = \frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \overline{BE} \cdot \sin 70^\circ \quad | : \left(\frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \sin 70^\circ \right)$$

$$\frac{23,9}{\frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \sin 70^\circ} = \overline{BE}$$

$$6,5 = \overline{BE}$$

Betrachtet man nun das Dreieck ABE so gilt:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \cos \angle EBA$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \cos \angle EBA}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{7,8^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 7,8 \cdot 6,5 \cdot \cos 70^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = 8,3 \text{ cm}$$

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Kreis um E mit dem Radius 3 cm schneidet die Strecke $[AE]$ im Punkt P und die Strecke $[BE]$ im Punkt Q .

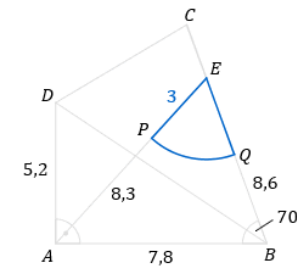
Zeichnen Sie den Kreisbogen \widehat{PQ} in die Zeichnung zu A 2.0 ein.

Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken $[QE]$,

$[EP]$ und den Kreisbogen \widehat{PQ} begrenzt wird.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

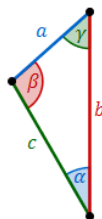
- Beim Punkt E einstechen und eine Länge von 3 cm auf der Strecke $[AE]$ antragen. Hier befindet sich der Punkt P .

- Der Schnittpunkt der Kreislinie um Punkt E mit $r = 3$ cm und der Strecke $[EB]$ ergibt Punkt Q .

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Gegeben: $\overline{EP} = 3$ cm

Gesucht: Flächeninhalt des Kreissektors $AEPQ$

Erläuterung: *Sinussatz*

In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck ABE gilt somit: $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle AEB} = \frac{\overline{BE}}{\sin \angle BAE} = \frac{\overline{AE}}{\sin \angle EBA}$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle AEB} = \frac{\overline{AE}}{\sin \angle EBA}$$

$$\frac{7,8}{\sin \angle AEB} = \frac{8,3}{\sin 70^\circ} \quad | \cdot \sin \angle AEB$$

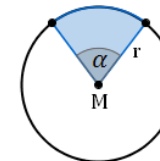
$$7,8 = \frac{8,3 \cdot \sin \angle AEB}{\sin 70^\circ} \quad | \cdot \sin 70^\circ$$

$$7,8 \cdot \sin 70^\circ = 8,3 \cdot \sin \angle AEB \quad | : 8,3$$

$$\frac{7,8 \cdot \sin 70^\circ}{8,3} = \sin \angle AEB$$

$$\Rightarrow \angle AEB = 62,0^\circ$$

Nun kann der Flächeninhalt des Kreissektors A_{EPQ} berechnet werden:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*

Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{EPQ} = 3^2 \cdot \pi \cdot \frac{62^\circ}{360^\circ} = 4,9 \text{ cm}^2$$