

Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = 0,5x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

Die Gerade g besitzt die Gleichung $y = 0,5x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,5x^2 - 5x + 7$ besitzt.

Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g für $x \in [0; 10]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $0 \leq x \leq 10$; $-6 \leq y \leq 8$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|0,5x^2 - 5x + 7)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n(x|0,5x - 2)$ auf der Gerade g besitzen dieselbe Abszisse x . Diese Punkte bilden zusammen mit Punkten B_n und D_n Rauten $A_nB_nC_nD_n$, wobei gilt: $\overline{B_nD_n} = 2$ LE und $y_{C_n} > y_{A_n}$.

Zeichnen Sie die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ für $x = 3$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 6$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt.

Geben Sie das Intervall für x an.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[A_nC_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_nC_n}(x) = (-0,5x^2 + 5,5x - 9)$ LE.

Berechnen Sie sodann das Maß φ des Winkels $D_2C_2B_2$ und die Seitenlänge $\overline{A_2B_2}$ der Raute $A_2B_2C_2D_2$.

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ stets kleiner als 7 FE ist.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = 0,5x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

Die Gerade g besitzt die Gleichung $y = 0,5x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,5x^2 - 5x + 7$ besitzt.

Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g für $x \in [0; 10]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $0 \leq x \leq 10$; $-6 \leq y \leq 8$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben: $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$ sowie $p: y = 0,5x^2 + bx + c$

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$ werden in die Parabelgleichung $p: y = 0,5x^2 + bx + c$ eingesetzt.

Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten b und c .

$$(I) \quad 19 = 0,5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$(II) \quad -5 = 0,5 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$

$$(I) \quad 19 = 2 - 2b + c$$

$$(II) \quad -5 = 8 + 4b + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (II) wird von Gleichung (I) subtrahiert, so dass die Variable c wegfällt.

$$(I)-(II) \quad 24 = -6 - 6b \quad | \quad +6$$

$$(I)-(II) \quad 30 = -6b \quad | \quad :(-6)$$

$$\Rightarrow \quad b = -5$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$b = -5$ wird in Gleichung (I) $19 = 2 - 2b + c$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach c aufgelöst.

$$19 = 2 - 2 \cdot (-5) + c$$

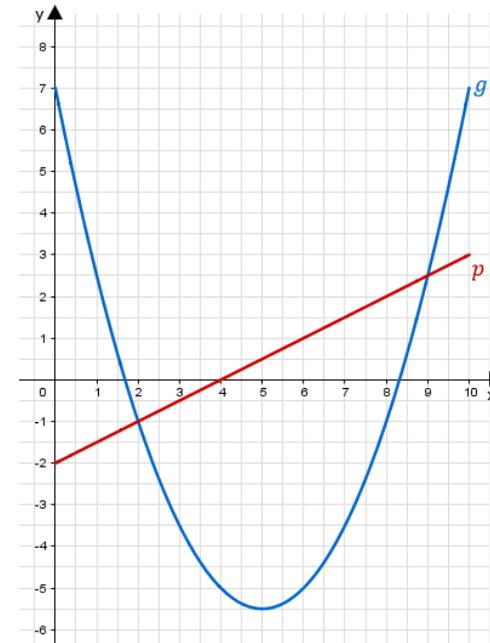
$$19 = 12 + c \quad | \quad -12$$

$$\Rightarrow \quad c = 7$$

$$\Rightarrow \quad p : y = 0,5x^2 - 5x + 7$$

Skizze

Einzeichnen der Parabel $p : y = 0,5x^2 - 5x + 7$ und der Geraden $g : y = 0,5x - 2$:



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Geraden g :

- Umwandeln der Steigung $m_g = 0,5$ in einen Bruch $m_g = \frac{1}{2}$.
- Einzeichnen des y - Achsenabschnittes $t = -2$ auf der y -Achse.
- Antragen der Steigung $m_g = \frac{1}{2}$ ausgehend vom y - Achsenabschnitt:
 - 1) 2 Einheiten parallel zur x -Achse nach rechts gehen
 - 2) 1 Einheit parallel zur y -Achse nach oben gehen
 - 3) Punkt setzen
- Gerade durch den y - Achsenabschnitt und den ermittelten Punkt legen.

Einzeichnen der Parabel:

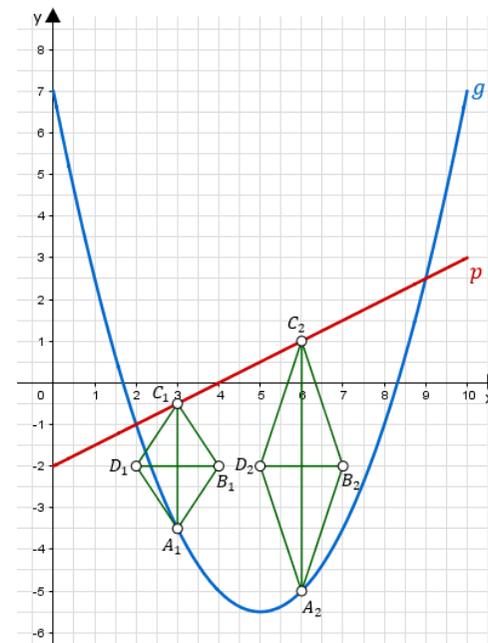
- Ermittlung des Scheitelpunktes: $S\left(\frac{-b}{2a} | y_S\right) \Rightarrow S(5 | -5,5)$
- Einzeichnen des Scheitelpunktes.
- Berechnung weitere Funktionswerte mithilfe des Taschenrechners oder Leitpunkte bestimmen ($\Delta y = m \cdot (\Delta x)^2$)
- Antragen der berechneten Punkte und verbinden zu Parabel.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x | 0,5x^2 - 5x + 7)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n(x | 0,5x - 2)$ auf der Gerade g besitzen dieselbe Abszisse x . Diese Punkte bilden zusammen mit Punkten B_n und D_n Rauten $A_nB_nC_nD_n$, wobei gilt: $\overline{B_nD_n} = 2$ LE und $y_{C_n} > y_{A_n}$.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ für $x = 3$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 6$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 3$:

- 1) Antragen des Punktes A_1 , indem man auf der x -Achse zu $x = 3$ geht und dann nach unten, bis man auf den Graphen der Parabel p stößt.
- 2) Antragen des Punktes C_1 , indem man auf der x -Achse zu $x = 3$ geht und dann nach oben, bis man auf den Graphen der Geraden g stößt.
- 3) Antragen des Punktes B_1 , indem man den Mittelpunkt der Strecke $[A_1 C_1]$ sucht und dann 1 LE parallel zur x -Achse nach rechts geht.
- 4) Antragen des Punktes D_1 , indem man man von Mittelpunkt der Strecke $[A_1 C_1]$ 1 LE parallel zur x -Achse nach links geht.
- 6) Verbinden der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 zur Raute.

Zum Einzeichnen der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 6$ geht man analog vor.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt. Geben Sie das Intervall für x an.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Schnittpunkt zweier Funktionen

$$p: y = 0,5x^2 - 5x + 7$$

$$g: y = 0,5x - 2$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Rauten $A_n B_n C_n D_n$ kann es nicht geben, wenn die Punkte A_n und B_n gleiche Koordinaten haben. Das ist der Fall, wenn sich die Parabel und die Gerade schneiden.

Man sucht zunächst nach den Schnittpunkten.

Schnittpunkte bestimmen:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Schema für das Bestimmen der x -Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Gleichung nach x auflösen.

$$0,5x^2 - 5x + 7 = 0,5x - 2 \quad | -0,5x + 2$$

$$0,5x^2 - 5,5x + 9 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung kannst du, unter anderem, mit der Mitternachtsformel bestimmen.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5,5) \pm \sqrt{(-5,5)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 9}}{2 \cdot 0,5} = 5,5 \pm \sqrt{12,25}$$

$$x_1 = 5,5 - \sqrt{12,25} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 5,5 + \sqrt{12,25} = 9$$

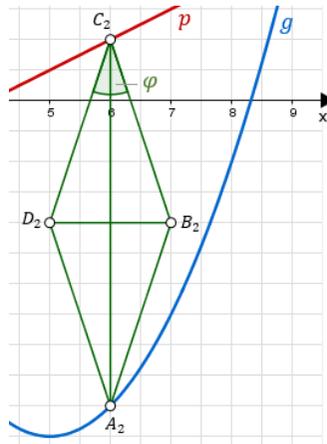
Erläuterung: *Erläuterung*

Laut Konstruktion gilt $y_{C_n} > y_{A_n}$, d.h. Punkte C_n liegen immer oberhalb von Punkten A_n . Dies ist nur dann der Fall, wenn $x \in]2; 9[$.

Für $x \in]2; 9[$ gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[A_n C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n C_n}(x) = (-0,5x^2 + 5,5x - 9)$ LE. Berechnen Sie sodann das Maß φ des Winkels $D_2 C_2 B_2$ und die Seitenlänge $\overline{A_2 B_2}$ der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$.

Lösung zu Aufgabe B1.4**Länge einer Strecke**

Gegeben: $A_n(x|0,5x^2 - 5x + 7)$ und $C_n(x|0,5x - 2)$

Gesucht: $\overline{A_nC_n}(x)$

Erläuterung: *Senkrechte Strecken*

Da die Strecken $[A_nC_n]$ parallel zur y -Achse verlaufen, kann $\overline{A_nC_n}$ berechnet werden, indem $y_{\text{oben}} - y_{\text{unten}}$ berechnet wird.

Es gilt also: $\overline{A_nC_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$$\overline{A_nC_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_nC_n} = 0,5x - 2 - (0,5x^2 - 5x + 7)$$

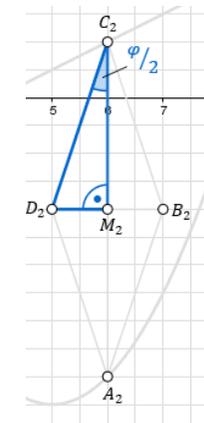
$$\overline{A_nC_n} = 0,5x - 2 - 0,5x^2 + 5x - 7$$

$$\overline{A_nC_n} = -0,5x^2 + 5,5x - 9$$

$$\Rightarrow \overline{A_nC_n}(x) = (-0,5x^2 + 5,5x - 9) \quad \text{LE}$$

Winkel bestimmen

Man betrachte das rechtwinklige Dreieck $\triangle D_2M_2C_2$, wobei M_2 der Mittelpunkt der Strecke $[D_2B_2]$ ist.



Erläuterung: *Erläuterung*

Per Konstruktion ist $\overline{B_2D_2} = 2$ und somit $\overline{D_2M_2} = 2 : 2 = 1$.

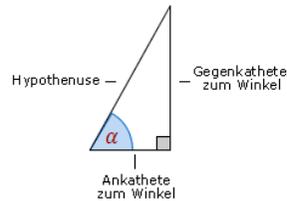
$$\overline{D_2M_2} = 1$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Für $\overline{A_2C_2}$ wird $\overline{A_nC_n}(6)$ berechnet.

$$\overline{C_2M_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_2C_2} = \frac{1}{2} (-0,5 \cdot 6^2 + 5,5 \cdot 6 - 9) = 3$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ aus $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{1}{3} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) = 18,43^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\varphi = 36,86^\circ$$

Länge einer Strecke

$$\overline{A_2B_2} = \overline{C_2D_2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ (LE)}$$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

Da die Seiten einer Raute alle gleich lang sind, gilt: $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2D_2}$.

Für die Länge $\overline{C_2D_2}$ wird im Dreieck $D_2M_2C_2$ der Satz des Pythagoras angewendet:

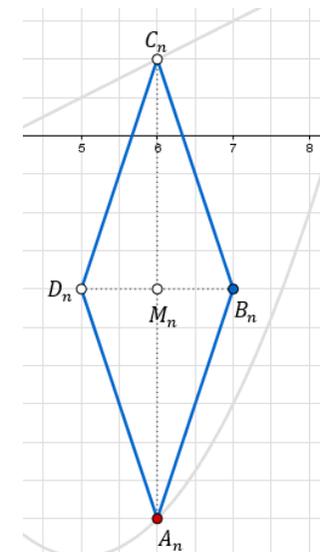
In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

Lösung zu Aufgabe B1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln



Gegeben: $A_n(x|0,5x^2 - 5x + 7)$; $C_n(x|0,5x - 2)$

Gesucht: $B_n(x_{B_n}|y_{B_n})$

Erläuterung: *Erläuterung*

Für die Punkte B_n und D_n gilt nach Konstruktion: $\overline{B_n D_n} = 2$.
Sie liegen Punkte B_n von der x-Koordinate der Punkte A_n aus 1 Einheiten nach rechts.

$$x_{B_n} = x_{A_n} + 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad B_n(x + 1 | \dots)$$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Punkte B_n liegen auf der gleichen Höhe wie die Mittelpunkte M_n der Strecke $[A_n C_n]$.

$$y_{B_n} = y_{M_n}$$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel $M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

$$y_{B_n} = \frac{y_{A_n} + y_{C_n}}{2}$$

$$y_{B_n} = \frac{0,5x^2 - 5x + 7 + 0,5x - 2}{2} = \frac{0,5x^2 - 4,5x + 5}{2} = 0,25x^2 - 2,25x + 2,5$$

$$\Rightarrow B_n(x + 1 | 0,25x^2 - 2,25x + 2,5)$$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

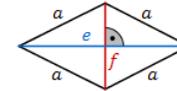
Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt A der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ stets kleiner als 7 FE ist.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Flächeninhalt einer Raute

Gegeben: $\overline{A_n C_n}(x) = (-0,5x^2 + 5,5x - 9)$ LE; $\overline{B_n D_n} = 2$ LE

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \cdot \overline{B_n D_n} = \frac{1}{2} \cdot (-0,5x^2 + 5,5x - 9) \cdot 2 = (-0,5x^2 + 5,5x - 9) \text{ FE}$$

Extremwertaufgabe

x -Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $A(x)$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt der Raute $A_n B_n C_n D_n$ ist für verschiedene x unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten x -Wert ist der Flächeninhalt $A(x) = (-0,5x^2 + 5,5x - 9)$ FE am größten (maximal).

Die Funktion $y = -0,5x^2 + 5,5x - 9$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Den größte Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

$$x_{\max} = x_S \text{ von } A(x)$$

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Funktion der Form $y = a x^2 + b x + c$ sind gegeben durch:

$$S \left(\frac{-b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

$$x_{\max} = \frac{-5,5}{2 \cdot (-0,5)} = 5,5$$

Maximalen Flächeninhalt bestimmen:

$$A_{\max} = A(5,5) = 6,125 \text{ FE} < 7 \text{ FE}$$