Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Gegeben sind Dreiecke $A\,B_n\,C$ mit der Seitenlänge $\overline{A\,C} = 4$ cm.
Die Winkel $B_n\,A\,C$ haben das Maß α mit $\alpha \in\,]0^\circ; 60^\circ[$.
Das Maß der Winkel $A\,C\,B_n$ ist doppelt so groß wie das Maß der Winkel $B_n\,A\,C$.

Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Ergänzen Sie die Zeichnung zum Dreieck $A\,B_1\,C$ für $\alpha = 50^\circ$.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Länge der Strecken $[B_n\,C]$ in Abhängigkeit von α und vereinfachen Sie mithilfe einer Supplementbeziehung.

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Das Dreieck $A\,B_2\,C$ ist gleichschenklig mit der Basis $[A\,B_2]$.
Begründen Sie, dass das Dreieck $A\,B_2\,C$ rechtwinklig ist.

Lösung

Aufgabe A3.

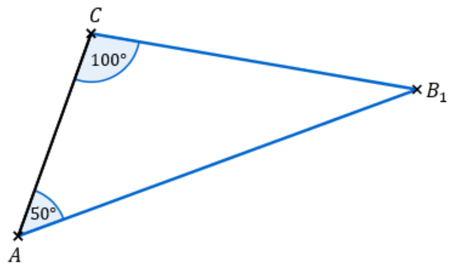
Gegeben sind Dreiecke $A\,B_n\,C$ mit der Seitenlänge $\overline{A\,C} = 4$ cm.
Die Winkel $B_n\,A\,C$ haben das Maß α mit $\alpha \in\,]0^\circ; 60^\circ[$.
Das Maß der Winkel $A\,C\,B_n$ ist doppelt so groß wie das Maß der Winkel $B_n\,A\,C$.

Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Ergänzen Sie die Zeichnung zum Dreieck $A\,B_1\,C$ für $\alpha = 50^\circ$.

Lösung zu Aufgabe A3.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- Antragen des Winkels $\alpha = 50°$ am Punkt A.
- Antragen des Winkels $\gamma = 100°$ am Punkt C.
- Der Schnittpunkt der beiden Winkelschenkel ergibt den Punkt B.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Länge der Strecken $[B_n C]$ in Abhängigkeit von α und vereinfachen Sie mithilfe einer Supplementbeziehung.

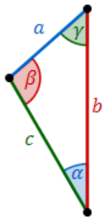
Lösung zu Aufgabe A3.2

Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{AC} = 4$ cm

Gesucht: $\overline{B_n C}$

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck AB_nC gilt somit: $\dfrac{\overline{B_n C}}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180° - 3\alpha)}$

$$\frac{\overline{B_n C}}{4} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180° - 3\alpha)}$$

Erläuterung: *Supplementbeziehung*

Die Supplementbeziehung $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ angewendet ergibt:

$\sin(180° - 3\alpha) = \sin 3\alpha$

$$\frac{\overline{B_n C}}{4} = \frac{\sin\alpha}{\sin(3\alpha)} \,|\cdot 4$$

$$\overline{B_n C} = \frac{4 \cdot \sin\alpha}{\sin(3\alpha)} \text{ cm}$$

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

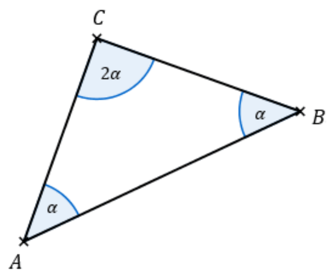
Das Dreieck $A\,B_2\,C$ ist gleichschenklig mit der Basis $[A\,B_2]$.
Begründen Sie, dass das Dreieck $A\,B_2\,C$ rechtwinklig ist.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Begründung

Gegeben: $\measuredangle B\,A\,C = \alpha$ und $\measuredangle A\,C\,B = 2\alpha$

Die Betrachtung einer Skizze liefert folgendes Bild:



Erläuterung: *Erläuterung*

Da das Dreieck $A\,B_2\,C$ gleichschenklig mit der Basis $[A\,B]$ ist gilt: $\measuredangle B\,A\,C = \measuredangle C\,B\,A = \alpha$

$\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ$

$4\alpha = 180^\circ \quad |:4$

$\alpha = 45^\circ$

$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ$

Somit ist das Dreieck $A\,B_2\,C$ rechtwinklig.