Mittlere-Reife-Prüfung 2019 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

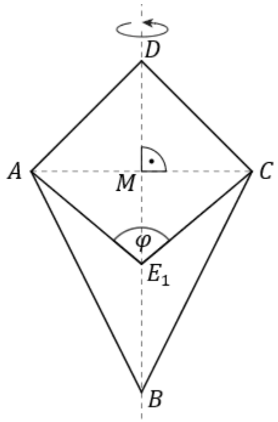
Gegeben ist das Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse BD und dem Diagonalenschnittpunkt M.

Es gilt: $\overline{\text{AM}} = \overline{\text{DM}} = 2$ cm und $\overline{\text{BD}} = 6$ cm.

Punkte E_n auf der Strecke [BM] legen zusammen mit den Punkten A, C und D die Drachenvierecke AE_nCD fest. Die Winkel CE_nA haben das Maß φ mit $\varphi \in [53,13°; 180°[$.

Die Zeichnung zeigt das Drachenviereck ABCD und das Drachenviereck AE_1CD für $\varphi = 100°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Drachenviereck AE_2CD für $\varphi = 70°$ in die Zeichnung zu A 1. ein.
Bestätigen Sie sodann die untere Intervallgrenze für φ durch Rechnung.

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Die Drachenvierecke AE_nCD rotieren um die Gerade BD.
Zeigen Sie, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan(0,5 \cdot \varphi)}\right)$ cm^3.

Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Das Drachenviereck AE_3CD ist ein Quadrat.
Bestimmen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers.

Lösung

Aufgabe A1.

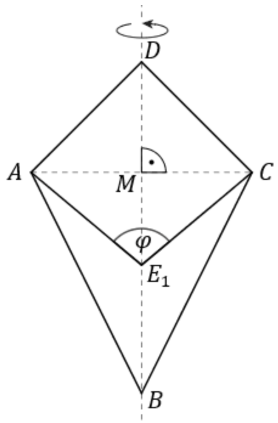
Gegeben ist das Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse BD und dem Diagonalenschnittpunkt M.

Es gilt: $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{DM}} = 2$ cm und $\overline{\mathrm{BD}} = 6$ cm.

Punkte E_n auf der Strecke [BM] legen zusammen mit den Punkten A, C und D die Drachenvierecke $\mathrm{AE}_n\mathrm{CD}$ fest. Die Winkel $\mathrm{CE}_n\mathrm{A}$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [53,13°; 180°[$.

Die Zeichnung zeigt das Drachenviereck ABCD und das Drachenviereck $\mathrm{AE}_1\mathrm{CD}$ für $\varphi = 100°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

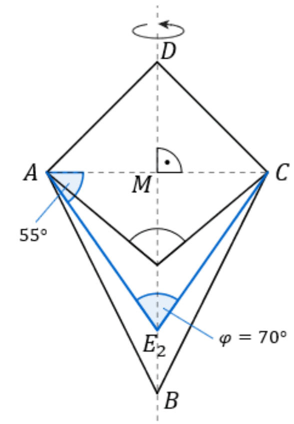


Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Drachenviereck $\mathrm{AE}_2\mathrm{CD}$ für $\varphi = 70°$ in die Zeichnung zu A 1. ein. Bestätigen Sie sodann die untere Intervallgrenze für φ durch Rechnung.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze



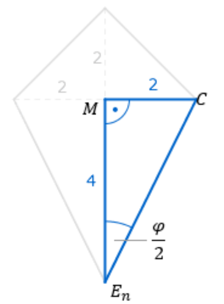
Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Wenn $\varphi = 70°$, dann sind die Winkel bei A und C im gleichschenkligen Dreieck $\mathrm{AE}_2\mathrm{C}$ wegen der Winkelsumme im Dreieck jeweils $\frac{180° - 70°}{2} = 55°$ groß.

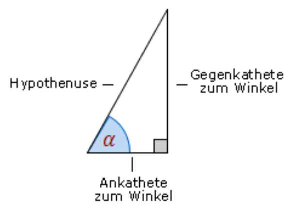
Winkel bestimmen

φ wird am kleinsten, wenn $E_n = B$.

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $\mathrm{E}_n\mathrm{MC}$:



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Ankathete zu }\alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{6-2}{2}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ aus $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{2}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{4}{2} \rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \qquad |\cdot 2$$

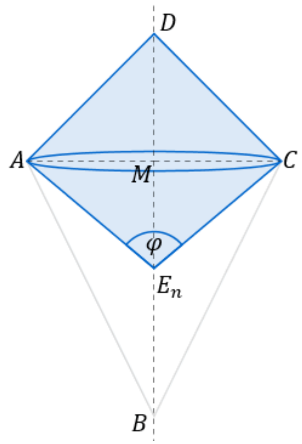
$$\varphi = 2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = 53,13°$$

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Die Drachenvierecke AE_nCD rotieren um die Gerade BD.
Zeigen Sie, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{8}{3}\cdot\pi\cdot\left(1+\frac{1}{\tan(0,5\cdot\varphi)}\right)$ cm^3.

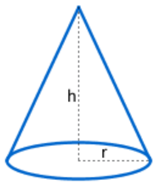
Lösung zu Aufgabe A1.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



$$V_{\text{Gesamt}} = V_{\text{oberer Kegel}} + V_{\text{unterer Kegel}}$$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\text{AM}}^2 \cdot \overline{\text{DM}} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\text{AM}}^2 \cdot \overline{\text{ME}_n}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\text{AM}}^2$ wird aus beiden Summanden ausgeklammert.

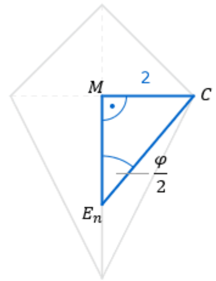
$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\text{AM}}^2 \cdot \left(\overline{\text{DM}} + \overline{\text{ME}_n}\right)$$

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \left(2 + \overline{\text{ME}_n}\right)$$

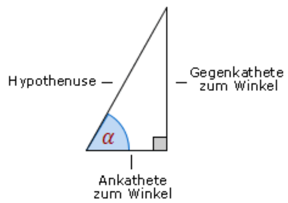
Seite eines Dreiecks bestimmen

Nebenrechnung: $\overline{\text{ME}_n}$ bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck E_nMC:



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\overline{\text{ME}_n}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{ME}_n} = \frac{2}{\tan\frac{\varphi}{2}}$$

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

Einsetzen von $\overline{\text{ME}_n} = \frac{2}{\tan\frac{\varphi}{2}}$ ergibt:

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{2}{\tan\frac{\varphi}{2}}\right)$$

Erläuterung: *Ausklammern*

2 wird aus dem Termn $2 + \frac{2}{\tan\frac{\varphi}{2}}$ ausgeklammert.

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\right)$$

Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Das Drachenviereck AE_3CD ist ein Quadrat.
Bestimmen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

Das Drachenviereck ist ein Quadrat, wenn $\varphi = 90°$.

$$V\ (90°) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan\frac{90°}{2}}\right) = 16,76\ \text{cm}^3$$